Elementi di Analisi 1

Rovesti Gabriel

Attenzione

Il file non ha alcuna pretesa di correttezza; di fatto, è una riscrittura attenta di appunti, slide, materiale sparso in rete, approfondimenti personali dettagliati al meglio delle mie capacità. Credo comunque che, per scopo didattico e di piacere di imparare (sì, io studio per quello e non solo per l'esame) questo file possa essere utile. Semplice si pone, per davvero ci prova.
Thank me sometimes, it won't kill you that much.

Gabriel

Sommario

Potenze di numeri reali

Moltiplicazioni di un numero (base - b) per un certo numero di volte (esponente - a) → b^e

Proprietà:
- Una potenza elevata a 0 equivale ad 1 → $a^0 = 1$
- Una potenza può avere esponente negativo e significa che prendiamo il reciproco della base $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- Una potenza elevata ad esponente razionale (rapporto), allora avremo una radice $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$

Altre proprietà utili:
- **Positività** Per ogni x reale ed $a > 0$, si ha
$$\boxed{a^x > 0.}$$
- **Monotonia** Se è $a > 1$, allora le potenze di a crescono al crescere dell'esponente, ossia
$$x < y \Longleftrightarrow a^x < a^y$$
mentre se è $0 < a < 1$, allora le potenze di a decrescono al crescere dell'esponente, ossia
$$x < y \Longleftrightarrow a^x > a^y.$$
- **Invertibilità** Per ogni $a > 0$, due potenze di a sono uguali se e solo se sono uguali gli esponenti, cioè
$$a^x = a^y \Longleftrightarrow x = y.$$

Utile: la potenza con esponente irrazionale (per a > 0), può essere visto come:
$$a^s = e^{\log(a^s)} = e^{s \log(a)}$$

Proprietà delle funzioni esponenziali e dei logaritmi

1) Equazioni esponenziali elementari

L'equazione esponenziale elementare si presenta nella forma
$$ax = b, con\ a > 0\ e\ a \neq 1$$
e risulta essere:
a) impossibile se $b \leq 0$ (perché la funzione esponenziale è sempre positiva)
b) determinata se $b > 0$

A queste, si riconducono e risolvono equazioni del tipo: $a^{f(x)}=a^{g(x)}$

$$6^x = 36 \rightarrow 6^x = 6^2 \rightarrow x = 2$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9 \rightarrow 3^{-x} = 3^2 \rightarrow x = -2$$

$$(2018)^x = 1 \rightarrow x = 0$$

$$10^x = -10 \rightarrow impossibile$$

$$e^x = 0 \rightarrow impossibile$$

$$4^{2-x} \cdot 2^{x+1} = 16 \rightarrow \text{applicando le proprietà delle potenze}$$
$$2^{4-2x+x+1} = 2^4 \rightarrow 2^{5-x} = 2^4 \rightarrow x = 1$$

Logaritmi

Dati due numeri reali positivi a e b, con a ≠1, "a" detta base e "b" argomento, si chiama logaritmo in base a di b e si scrive $\log_a b$, l'esponente a cui elevare a per ottenere b, cioè:

$$x = \log_a b \iff a^x = b$$

dove deve essere $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$.

Valendo inoltre:

- Fissato $a > 0, a \neq 1$, si ha

$$\boxed{\log_a a^z = z \quad \text{per ogni } z \text{ reale.}}$$

  In particolare, $\boxed{\log_a a = 1}$ e $\boxed{\log_a 1 = 0}$ (in quanto $\log_a 1 = \log_a a^0$).

- Fissato $a > 0, a \neq 1$, si ha

$$\boxed{a^{\log_a b} = b \quad \text{per ogni } b \text{ reale positivo.}}$$

Normalmente, i logaritmi sono in base 10, ma si può usare la base "e", dove e = 2.71828… (numero di Nepero), che descrive il livello di crescita *nel corso del tempo* (la funzione esponenziale descrive la *quantità*).
Normalmente, *log* indica *log*$_{10}$; tuttavia, spesso, *log* indica proprio *logaritmo naturale*, espresso anche come *ln*.

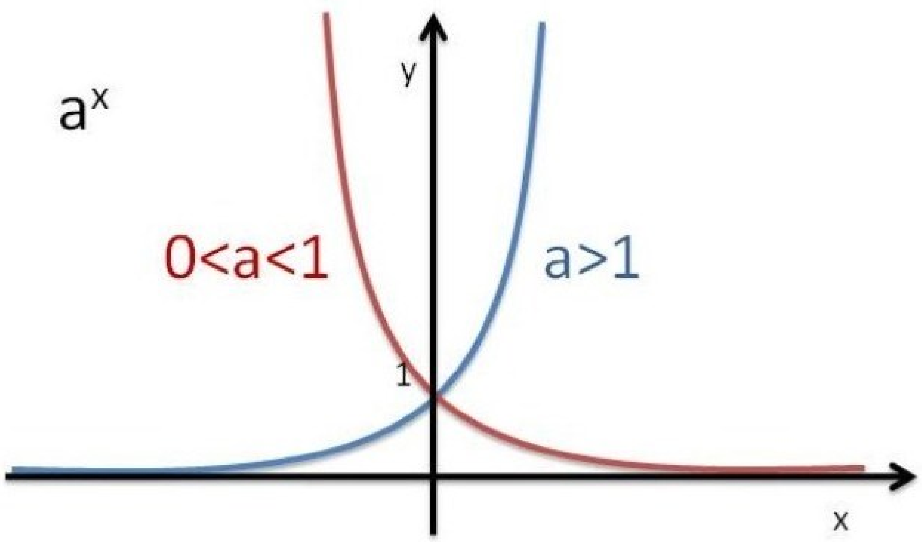
Confrontiamo la cosa utile: le funzione esponenziali e logaritmiche.

Si dice **funzione esponenziale** una funzione del tipo:

$$\forall x \in R \quad f(x) = a^x, a \in R_0^+$$

che associa ad ogni numero reale x un numero positivo rappresentato con a^x.
La funzione esponenziale è positiva per ogni x reale e il suo andamento dipende dal valore di a

$0 < a < 1$ $\qquad\qquad$ $a = 1$



Si dice **funzione logaritmo** una funzione del tipo:

$$\forall x \in R_0^+ \quad f(x) = \log_a x \quad , a \in R_0^+$$

che associa ad ogni numero reale positivo x un numero rappresentato con $\log_a x$.

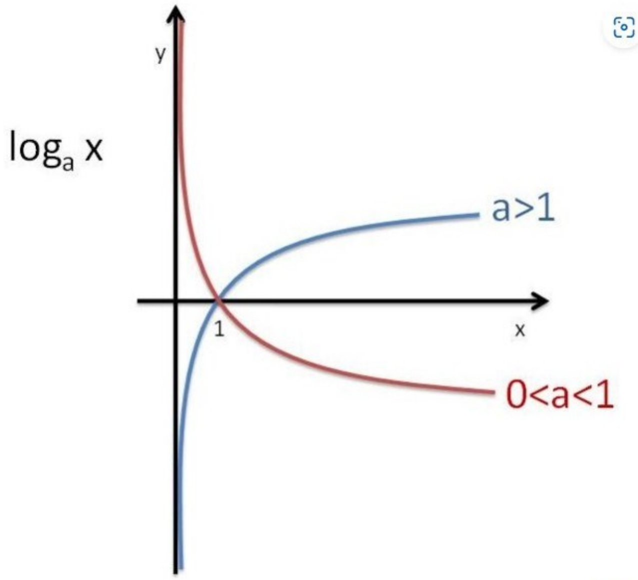
La funzione esponenziale è positiva per ogni x reale e il suo andamento dipende dal valore di a:

$$0 < a < 1 \qquad\qquad a > 1$$

$$x \in R_0^+ \iff x > 0$$

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b > 0$$

La funzione logaritmica di base a è la funzione **inversa** della funzione esponenziale di base a.



Fatti fondamentali funzioni goniometriche: seno, coseno, tangente

Funzione seno

La funzione goniometrica $y = \sin(x)$ è una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, che associa ad ogni x il cosiddetto seno di x

$$\sin(x) : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

$$x \mapsto \sin(x)$$

Il suo dominio è tutto $\mathbb{R}$ ed ha come immagine l'intervallo chiuso e limitato $[-1, 1]$.

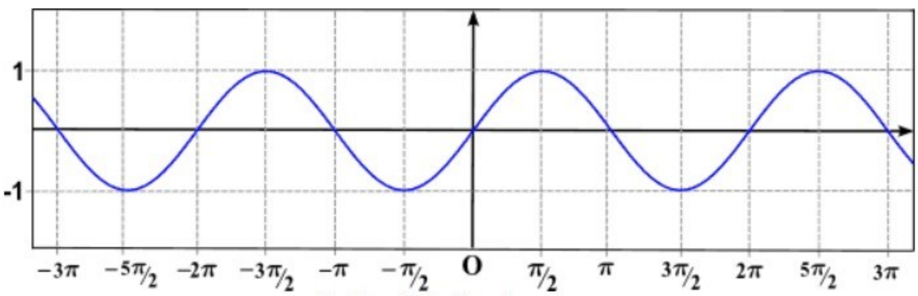


Grafico della funzione seno

Funzione coseno

Le funzione coseno, insieme al seno, è la seconda ed unica funzione che non viene definita a partire da altre funzioni goniometriche

$$\cos(x) : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

$$x \mapsto \cos(x)$$

Il suo dominio è tutto $\mathbb{R}$ ed ha come immagine l'intervallo $[-1, 1]$.

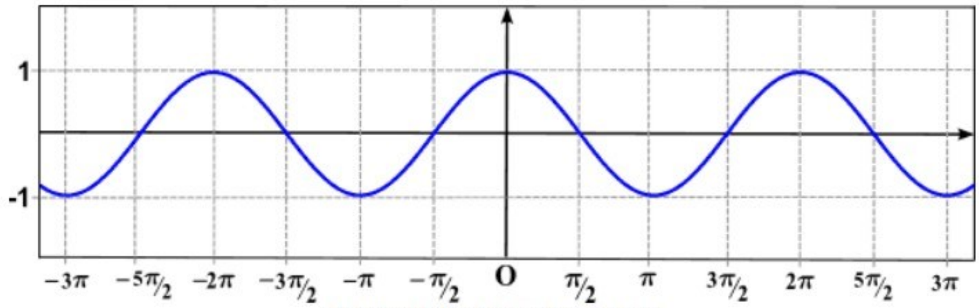


Grafico della funzione coseno

La funzione tangente $y = \tan(x)$ è definita come rapporto tra le funzioni seno e coseno:

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Il suo dominio è dato da $\mathbb{R}$ ad esclusione dei valori che annullano il coseno

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}$$

mentre la sua immagine è $\mathbb{R}$

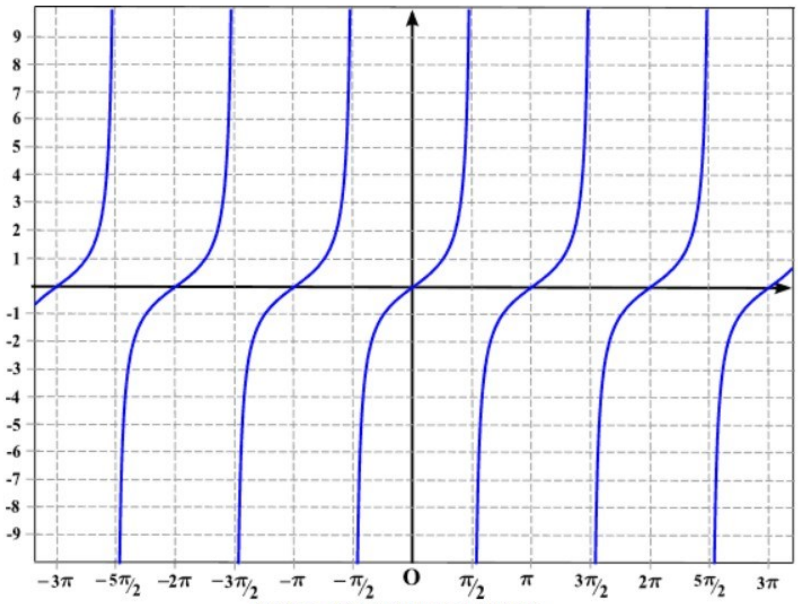


Grafico della funzione tangente

L'equazione della retta e della parabola

L'equazione delle retta permette di individuare l'appartenenza di punti (x, y) al piano cartesiano.
Può essere di due tipi:

1) Forma implicita

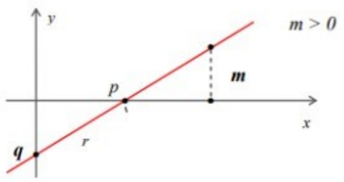
$$ax + by + c = 0$$

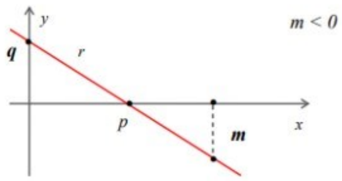
2) Forma esplicita

$$y = mx + q$$

m è il coefficiente angolare, indica la pendenza della retta.

se m> 0 cioè un numero positivo la retta sarà rivolta verso l'alto è crescente.





Se m< 0 cioè un numero negativo, a retta sarà rivolta verso il basso è decrescete.

q è il termine noto e rappresenta l'ordinata all'origine, cioè il punto in cui la retta interseca l'asse delle y

Utile dopo per le funzioni:

Rappresentazione grafica di una retta : primo metodo

Rappresentiamo nel piano cartesiano la retta di equazione **y= 2x+3**

1) Attribuiamo alla **x** valori da noi scelti e li sostituiamo nell'equazione per trovare il valore della **y** usando una tabella :

x	y
0	3
1	5
2	7

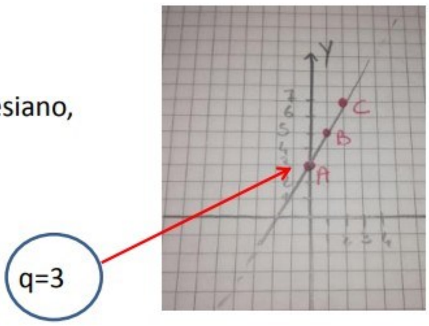
y= 2x+3

Se x= 0 y= 2* (0) +3 y=0+ 3 y=3 A (0;3)

se x= 1 y= 2*(1)+3 y= 2+3 Y=5 B (1;5)

se x= 2 y= 2*(2)+3 y= 4+3 Y=7 C (2;7)

2) Riportiamo i punti ottenuti sul piano cartesiano, li uniamo e otteniamo la retta



Rappresentazione grafica di una retta : secondo metodo

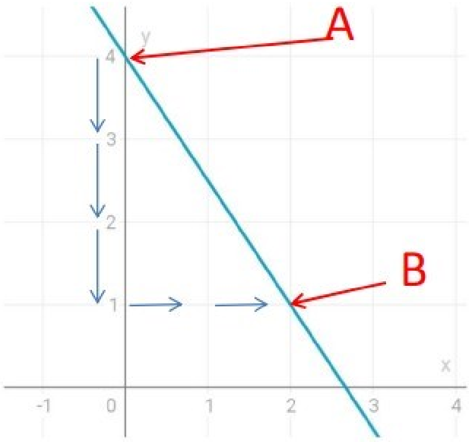
Rappresentiamo nel piano cartesiano la retta di equazione $$y = -\frac{3}{2}x + 4$$

1) Poiché **q=4** sappiamo che la retta interseca l'asse delle y nel punto 4. Quindi disegniamo sul piano cartesiano il punto y=4 . Questo punto lo chiamiamo A

2) Il coefficiente angolare è il rapporto tra l'asse delle y e l'asse delle x secondo la seguente formula:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{3}{2}$$

quindi da questa formula ricavo che y = -3 e la x=2



3) Partendo dal punto y=4, senza spostare la penna dal foglio mi sposto verso il basso di 3 unità (perché la y=-3) e a destra di 2 unità (perché la x=2). Ottengo il punto B.

4) Unisco il punto A e il punto B e ottengo la retta.

Equazioni di secondo grado

Esse hanno la forma: $$ax^2 + bx + c = 0$$

Possono ammettere a seconda del caso, un certo numero di soluzioni:

1) Due soluzioni. L'equazione di secondo grado è determinata e **ammette due soluzioni reali**.

$$S = \{x_1, x_2\}, \quad \text{con } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \;\text{ e }\; x_1 \neq x_2$$

2) Una soluzione. L'equazione di secondo grado è determinata e **ammette una soluzione reale**. Più precisamente si dice che l'equazione ammette *due soluzioni reali coincidenti*, o anche che ammette *una soluzione reale con molteplicità algebrica 2*.

$$S = \{x_1\}, \quad \text{con } x_1 \in \mathbb{R} \qquad (x_1 = x_2)$$

3) Nessuna soluzione. L'equazione di secondo grado è impossibile e **non ammette alcuna soluzione reale**.

$$\nexists x \in \mathbb{R}$$

Per risolverle, normalmente, si usa la formula del *delta* o *discriminante*:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con } a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0 \qquad \Delta = b^2 - 4ac$$

E le radici/soluzioni:

Il discriminante ci permette di scrivere la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

o, esplicitamente

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{cases}$$

Risoluzione delle altre versioni:

- Monomia → b = c = 0 $\quad ax^2 = 0 \quad \text{con } a \neq 0$ La loro soluzione è: $\quad x = 0$
- Pura → b = 0 La loro soluzione è:

  $$ax^2 + c = 0 \quad \text{con } a \neq 0,\ c \neq 0 \qquad x^2 = \frac{-c}{a} \qquad x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

- Spurie → c = 0 La loro soluzione è:

  $$ax^2 + bx = 0 \quad \text{con } a \neq 0,\ b \neq 0 \qquad x_1 = 0,\ x_2 = \frac{-b}{a}.$$

Numeri reali ed insiemi

L'insieme è una collezione di oggetti. Un elemento può *appartenere* o *non appartenere*.

Valgono le proprietà di:

UNIONE $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$ Si definisce l'*unione* di A e B come l'insieme

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \; o \; x \in B\}$$

INTERSEZIONE $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$ L'*intersezione* di A e B è l'insieme

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \; e \; x \in B\}.$$

DIFFERENZA $(\mathbf{A} \setminus \mathbf{B})$ Per definizione si pone

$$A \setminus B = \{x \in X : x \in A \; e \; x \notin B\}.$$

L'insieme $A \setminus B$ si chiama insieme differenza di A e B.

COMPLEMENTARE L'insieme complementare ("il complementare") di A in X è l'insieme

$$A^C = X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}.$$

Da qui, introduciamo il concetto di funzione:

Definizione 1.2.3 (Funzione)**.** Una funzione f da A a B è una relazione da A a B tale che

(1) $\forall\, x \in A \quad \exists\, y \in B$ tale che $(x, y) \in f$;

(2) se $(x, y) \in f$ e $(x, y') \in f$ allora $y = y'$ (ossia f è *univoca*).

Data una funzione f, useremo d'ora in avanti la notazione $f\colon A \to B$. In tal caso A è chiamato il *dominio* di f, mentre B è il *codominio* di f.
In altre parole, se $f\colon A \to B$ è una funzione si ha che

$$\forall x \in A \, \exists!\, y \in B \, : \, (x, y) \in f.$$

Si pone inoltre $y = f(x)$, e si dice che y è il valore di f in x.

Da qui, parliamo di funzione *iniettiva* se $\quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$

e *suriettiva* se: $\quad f(A) = B$

Valgono le relazioni d'ordine:

1) *riflessiva* se $x \mathcal{R} x \quad \forall x \in A$;

2) *simmetrica* se $x \mathcal{R} y \overset{implica}{\Longrightarrow} y \mathcal{R} x$;

3) *transitiva* se $x \mathcal{R} y$ e $y \mathcal{R} z \overset{implica}{\Longrightarrow} x \mathcal{R} z$;

4) *antisimmetrica* se $x \mathcal{R} y$ e $y \mathcal{R} x \overset{implica}{\Longrightarrow} x = y$.

Si dice che una relazione $\mathcal{R}$ è una relazione d'*equivalenza* se $\mathcal{R}$ è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Possiamo quindi *confrontare* tutte le coppie di elementi e dare queste definizioni:

Definizione 1.3.3. Sia $(X, \leq)$ un insieme non vuoto e ordinato (parzialmente e/o totalmente) e sia $A \subseteq X$, $A \neq \varnothing$.

- Si dice che $x \in X$ è un *maggiorante* di A se $a \leq x \; \forall \, a \in A$.
- Si dice che $y \in X$ è un *minorante* di A se $y \leq a \; \forall \, a \in A$.
- Si dice che A ha *massimo* se $\exists \, \lambda \in A$ tale che $a \leq \lambda \; \forall \, a \in A$. In tal caso $\lambda \overset{def.}{=} \max A$.
- Si dice che A ha *minimo* se $\exists \, \mu \in A$ tale che $\mu \leq a \; \forall \, a \in A$. In tal caso $\mu \overset{def.}{=} \min A$.

La differenza tra massimo e maggiorante (e analogamente, tra minimo e minorante) è che:

- il massimo (o minimo) di un insieme, se esiste, appartiene all'insieme ed è il più grande (o più piccolo) dell'insieme.
- Il maggiorante invece NON appartiene NECESSARIAMENTE all'insieme. Il massimo è un maggiorante, ma NON vale l'implicazione inversa.

Se un insieme è ordinato il massimo (max) o minimo (min) è unico.

A questo punto, si introducono le definizioni di estremi.

Definizione 1.3.4 (Estremi superiore ed inferiore: sup, inf)**.** Siano $(X, \leq)$ un insieme ordinato e $A \subseteq X$, $A \neq \varnothing$. Si dice che A ha *estremo superiore* in $(X, \leq)$ se l'insieme dei maggioranti di A è non vuoto e ha minimo. Tale elemento (se esiste) si indica con $\sup A$.
(Osservare che se esiste $\sup A$, allora esso è il minimo dei maggioranti).

Per analogia, sia $A \subseteq X$, $A \neq \varnothing$. Se l'insieme dei minoranti di A in $(X, \leq)$ è non vuoto e ha massimo, allora esso è detto *estremo inferiore* di A e si indica con $\inf A$.
(Pertanto, se esiste $\inf A$ esso è il massimo dei minoranti di A).

In particolare:

- Un maggiorante è un numero reale che maggiora, cioè più grande, di ogni elemento dell'insieme.
- Un minorante è un numero reale che minora, cioè più piccolo, di ogni elemento dell'insieme.
- L'estremo superiore è il più piccolo dei maggioranti e il più piccolo numero reale più grande di tutti gli elementi dell'insieme considerato
- L'estremo inferiore è il più grande dei minorante e il più grande numero reale più piccolo di tutti gli elementi dell'insieme considerato

Proprietà di sup e inf

Siano $(X, \leq)$ un insieme ordinato e $A \subseteq X$, $A \neq \varnothing$.

(SUP) Si ha che $\lambda = \sup A$ se e solo se valgono entrambe le seguenti:

1) $a \leq \lambda \quad \forall\, a \in A$;
2) $\lambda_1 \in X,\, a \leq \lambda_1 \quad \forall\, a \in A \implies \lambda \leq \lambda_1$.

(INF) Si ha che $\mu = \inf A$ se e solo se valgono entrambe le seguenti:

1) $\mu \leq a \quad \forall\, a \in A$;
2) $\mu_1 \in X,\, \mu_1 \leq a \quad \forall\, a \in A \implies \mu_1 \leq \mu$.

Si dimostra (ma omettiamo di farlo) il seguente:

Teorema 1.3.2. *Siano $(X, \leq)$ un insieme ordinato (parzialmente) ed $A \subseteq X$, $A \neq \varnothing$. Valgono le seguenti:*

1) *se A ha massimo, allora si ha $\max A = \sup A$;*
2) *se A ha minimo, allora si ha $\min A = \inf A$.*

La dimostrazione è un semplice esercizio, basato sulle definizioni.

Definizione 1.3.5. Sia $A \subseteq X$, $A \neq \varnothing$, dove $(X, \leq)$ è un insieme ordinato. Si dice che A è *superiormente limitato* se esiste (almeno) un maggiorante di A. Inoltre A è *inferiormente limitato* se esiste (almeno) un minorante di A. Infine l'insieme A è detto *limitato* se esistono (almeno) un minorante e un maggiorante di A.

In particolare, si ha che un insieme ordinato è <u>completo</u> se ogni suo sottoinsieme diverso da 0 sia superiormente limitato e ammette estremo superiore.

Dato un insieme, l'ordinamento dei numeri:

- sui numeri naturali, ricaviamo che l'insieme è ordinato per il *principio di induzione di Peano*, cioè tale che dati due numeri, ne esista sempre almeno un numero somma e così via, partendo dal primo
- sui numeri razionali, sappiamo che la proprietà vale passando a frazioni equivalenti ($a/b < c/d \Leftrightarrow ad < bc$), quindi moltiplicando o dividendo i numeri, siamo sempre in grado di confrontarli.

In particolare, però:

Teorema 1.3.3. *Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato e completo. Sia $A \subseteq X$, $A \neq \varnothing$. Se A è inferiormente limitato allora A ammette estremo inferiore (cioè, $\exists \inf A$).*

L'insieme Q non è completo

Esempio 1.3.3 (Importante: $(\mathbb{Q}, \leq)$ non è completo). Si consideri l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ munito dell'usuale relazione d'ordine $\leq$.
Sia quindi $A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ e } x^2 < 2\}$. Si vede facilmente che $A \neq \varnothing$ e che A è superiormente limitato.

Infatti $1 \in A$. Inoltre

$$\begin{aligned} x \in A &\implies x > 0,\, x^2 < 2 \implies x > 0,\, x^2 < 4 \\ &\implies x > 0,\, (x-2)(x+2) < 0 \implies x - 2 < 0 \\ &\implies x < 2. \end{aligned}$$

Affermiamo ora che $\nexists \sup A$.

Stiamo quindi dicendo: esiste un estremo superiore e noi, per assurdo, diciamo che non esiste.
Per dimostrare tale affermazione, ragioniamo per assurdo. Se

$$\exists\, \lambda = \sup A$$

allora dev'essere vera una delle seguenti alternative:

(1) $\lambda^2 < 2$ oppure

(2) $\lambda^2 = 2$ oppure

(3) $\lambda^2 > 2$.

Dimostreremo che in ognuno di questi tre casi si arriva ad un assurdo.
I casi (1) e (3) sono simili.
Proviamo che se vale (1) si arriva ad una contraddizione.

1) Per $\lambda^2 < 2$,
Infatti affermiamo che, se $\lambda^2 < 2$, allora esiste $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$, tale che

$$(\lambda + \varepsilon)^2 < 2.$$

Pertanto $\lambda + \varepsilon \in A$ e dunque $\lambda + \varepsilon \leq \sup A = \lambda$, cioè $\varepsilon \leq 0$. Assurdo.

e cioè partendo da un numero razionale ed ingrandendolo, ho trovato un numero razionale il cui quadrato è minore di due, il che è assurdo perché nella nostra ipotesi p era un estremosuperiore)

2) Per $\lambda^2 = 2$, la dimostrazione della irrazionalità di √2, non è possibile che un numero razionale al quadrato dia 2. Da $a^2/b^2 = 2$ si dedurrebbe, (in N, ovviamente con b ≠ 0), l'uguaglianza $2b^2 = a^2$, assurda, comparendo il fattore primo 2 un numero pari e dispari di volte rispettivamente nel primo e nel secondo membro dell'uguaglianza

3) Per $\lambda^2 > 2$
Se $\lambda^2 > 2$ allora affermiamo che esiste $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, tale che $(\lambda - \varepsilon)^2 > 2$ (proveremo tra poco anche quest'affermazione). In tal caso, si ha $\lambda > \lambda - \varepsilon$ e ciò contraddice che λ sia il minimo maggiorante di A.

Dimostriamo a questo punto le due affermazioni fatte, nei casi 1) e 3).
Sia $y := \lambda - \frac{\lambda^2-2}{\lambda+2} = \frac{2\lambda+2}{\lambda+2}$. Allora risulta che

$$y^2 - 2 = \frac{2(\lambda^2-2)}{(\lambda+2)^2} < 0 \implies y^2 < 2.$$

Ma $y > \lambda$ e quindi è della forma $y = \lambda + \varepsilon$ con $\varepsilon = \frac{2-\lambda^2}{\lambda+2}$.
Lo stesso argomento funziona nel caso 3). Precisamente, se vale $\lambda^2 > 2$ allora ragionando come prima si trova y della forma $y = \lambda - \varepsilon$ tale che $y^2 > 2$. In altre parole, se $\lambda^2 > 2$ allora esiste $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \lambda$, tale che $(\lambda - \varepsilon)^2 > 2$.

L'estremo superiore "p" del nostro sottoinsieme *S* di **Q**, quindi, non esiste e la completezza non è quindi una caratteristica posseduta dall'insieme **Q** . È dall'incompletezza di **Q** che partiamo per giustificare l'introduzione dei numeri reali, quali insieme indispensabile per poter esprimere misure di grandezze fisiche, operazione per cui è necessaria la completezza.

Abbiamo infatti che, per i numeri reali, avremo che:

Se A e B sono due sottoinsiemi non vuoti dell'insieme $\mathbb{R}$, tali che $a \leq b$ per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$, allora esiste un elemento $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leq c \leq b \text{ per ogni } a \in A \text{ e per ogni } b \in B$$

L'elemento c è detto ***elemento separatore*** degli insiemi A e B e, in generale, non è unico.

Concretamente, infatti, significa che, per ogni numero reale, vale che *un elemento separatore* significa che esiste sempre un elemento prima o dopo rispetto al numero considerato.
L'elemento, comunque, esiste sempre ed è *unico*, potendo quindi descrivere che:

1) Se A è un insieme non vuoto limitato superiormente e scegliamo come B l'insieme dei maggioranti di A, allora l'elemento separatore c tra A e B è unico.

2) In modo analogo si dimostra che se B è un insieme non vuoto e limitato inferiormente e A è l'insieme dei minoranti di B allora il massimo dell'insieme A è l'unico elemento separatore tra A e B.

Normalmente, valgono 4 proprietà per i numeri reali:

Ricordare che *gruppo commutativo* è un insieme X dotato di un'operazione binaria $*\colon X \times X \to X$ tale che:

1) $(x * y) * z = x * (y * z) \quad \forall\, x, y, z \in X$ (proprietà associativa);

2) $\exists\, e \in X$, elemento neutro, tale che $e * x = x * e = x$;

3) $\forall\, x \in X \quad \exists\, y \in X$, l'inverso, tale che $x * y = y * x = e$;

4) $\forall\, x, y \in X$ si ha $x * y = y * x$ (proprietà commutativa).

L'addizione presenta il numero 0 come elemento neutro, la moltiplicazione il numero 1.

Parliamo ora del *modulo* o anche *valore assoluto*: $|x| \overset{def.}{=} \max\{x, -x\}.$

I singoli insiemi sono:

- Un insieme si dice *numerabile* se può essere messo in corrispondenza biunivoca con **N**.
  - Se un insieme numerabile possiede un numero infinito di elementi, viene detto *infinito numerabile*, e dato che può essere messo in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali, si può dire che un insieme è infinito numerabile se ha la cardinalità di **N**.
- Si dice che un insieme è *al più numerabile* se è numerabile o finito.
- In matematica, un *insieme non numerabile* (o *più che numerabile*) è un insieme infinito che non è numerabile, cioè non può essere posto in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali.

Gli insiemi notevoli sono:

- **N** è l'insieme dei numeri naturali

  $\mathbb{N} = \{\, 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n,\ \dots \,\}$
- **Z** è l'insieme dei numeri interi

  $\mathbb{Z} = \{\, \dots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \dots \,\}$

- **Q** è l'insieme dei numeri reazionali, ovvero delle frazioni con numeratore e denominatore interi, e denominatore diverso da zero.

  $\mathbb{Q} = \{\, {}^{m}\!/\!{}_{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 0 \,\}$

Successioni

Abbiamo ora in concetto di *successione*, quindi un insieme di valori, intesa come funzione nei naturali, vista come:

$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{f_n\}$, oppure $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$.
Il termine f_n si chiama *termine n-esimo* della successione $\{f_n\}$.

avendo banalmente che un sottoinsieme di valori tra quelli considerati si chiama *sotto-successione*.

Abbiamo che una generica successione a_n converge al proprio limite (per n → ∞) se:

$$\boxed{\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,\bar{n} : \forall\, n \in \mathbb{N}\;(n > \bar{n} \implies |a_n - l| < \varepsilon)}.$$

e quindi, significa che per infinito, la successione "si avvicina-va verso" un valore "l" più o meno un certo valore (molto piccolo) ε.
Se il limite esiste, è unico (la dimostrazione si basa sul fatto che si trova come punto medio di due limiti e, alla fine, si trova che essi distano di una stessa costante).

Cose ovvie:
- se converge una successione, converge ogni sottosuccessione
- esistono somma, prodotto e divisione di successioni

Introduciamo la *permanenza del segno,* cioè la successione mantiene per tutti i suoi valori lo stesso segno:

Teorema 3.1.4 (Permanenza del segno). *Sia* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$.
Se $l > 0\,(l < 0)$ *si ha che*

$$\exists\,\bar{n} \in \mathbb{N} : a_n > 0\,(a_n < 0)\;\forall\, n > \bar{n}.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,\bar{n} \in \mathbb{N} : l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon \quad \forall\, n > \bar{n}.$$

Perciò, se $\varepsilon = |l|$ si ha

$$l - |l| < a_n < l + |l| \quad \forall\, n > \bar{n}.$$

Quindi, se $l > 0$ si ha

$$0 = l - |l| < a_n \quad \forall\, n > \bar{n}.$$

Altrimenti, se $l < 0$ si ha

$$a_n < l + |l| = 0 \quad \forall\, n > \bar{n}.$$

(Quindi, avremo che grazie al fatto che il limite sia visto come valore assoluto, si dimostra che la somma converge a 0).

Corollario 3.1.1. *Siano* $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$ *successioni tali che* $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = m$. *Se* $l < m$, *allora esiste* $\bar{n} \in \mathbb{N}$ *tale che* $a_n < b_n$ *per ogni* $n > \bar{n}$.

Dimostrazione. Dalle ipotesi segue che $b_n - a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} m - l > 0$. Cioè

$$\exists\, \bar{n} : b_n - a_n > 0 \quad \forall\, n > \bar{n}.$$

□

Corollario 3.1.2. *Siano* $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$ *successioni tali che* $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = m$. *Se* $a_n \leq b_n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$, *allora* $l \leq m$.

In altre parole, *le disuguaglianze si conservano al limite.*

Dimostrazione. Per assurdo, se $l > m$, per il Corollario 3.1.1 si ha che

$$\exists\, \bar{n} : b_n - a_n < 0 \quad \forall\, n > \bar{n}.$$

Ossia $b_n < a_n \quad \forall\, n > \bar{n}$, ciò che è assurdo. □

Similmente, avremo che anche le disuguaglianze e relative successioni, mantengono l'ordine degli elementi e quindi riescano ad essere sempre più grandi o più piccole di altre successioni (per assurdo, si prova a dimostrare che non sia così, ma per il fatto che esista un solo limite a cui tengono, di sicuro si mantiene la relazione di ordine).

Esiste il teorema del confronto/dei 2 Carabinieri per successioni:

Teorema 3.1.5 (2 Carabinieri). *Siano* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *e si assuma che* $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$ *e che* $\lim_{n\to+\infty} b_n = l$. *Se* $a_n \leq c_n \leq b_n\ \forall\, n$, *si ha* $\lim_{n\to+\infty} c_n = l$.

Anche le successioni possono essere limitate (sopra, sotto o da entrambe le parti).

Definizione 3.1.2. Sia $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$. Allora tale successione è detta:

- *superiormente limitata*, se $\exists\, M \in \mathbb{R} : a_n \leq M \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$;
- *inferiormente limitata*, se $\exists\, M \in \mathbb{R} : a_n \geq M \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$;
- *limitata*, se $\exists\, M \in \mathbb{R} : |a_n| \leq M \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Ogni successione convergente è limitata (la dimostrazione si basa sul fatto che, essendo l'insieme limitato, allora, esisterà almeno un estremo a cui tende).

Similmente, abbiamo che una successione *diverge* qualora tenda ad infinito e

- *diverge positivamente* se tende a $+\infty$
- *diverge negativamente* se tende a $-\infty$

Qualora abbiamo dei numeri che non possiamo maneggiare abbiamo che, si parla di *forme indeterminate*. Le forme indeterminate sono del tipo:

$$\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}, \quad \text{“}\infty - \infty\text{”} \quad \text{“}\frac{0}{0}\text{”} \quad 1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0$$

A questo punto, descriviamo la *monotonia*, intesa come una successione che continua ad avere uno stesso andamento e, in particolare, questa può crescere e decrescere.

Se la disuguaglianza non presenta un uguale, allora la crescenza/decrescenza è stretta.
Se la disuguaglianza presenta un uguale, allora la crescenza/decrescenza NON è stretta.

Definizione 3.1.4. Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ è detta *monotona crescente* se $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e *monotona decrescente* se si ha $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
Si dice inoltre che $\{a_n\}$ è *strettamente monotona crescente/decrescente* se le disuguaglianze usate nella definizione sono strette[4], ossia se $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $a_n > a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, rispettivamente.

Notazione. Le scritture $a_n \nearrow$ e $a_n \searrow$ indicano, rispettivamente, che a_n è monotona crescente oppure monotona decrescente (ma non necessariamente strettamente).

Teorema 3.1.8. *Ogni successione monotona ammette limite.*
Più precisamente, se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, valgono le seguenti affermazioni:

1) $a_n \nearrow \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$;

2) $a_n \searrow \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

(La dimostrazione si basa sul fatto che **R** è un insieme completo e, in particolare, presenterà sempre un estremo superiore o inferiore)

Una particolare successione è quella del numero di Nepero, che tende ad 1 come limite avendo che a_n converge e b_n diverge e quindi da qui, avremo il loro andamento si assesta ad *e*.

$$\boxed{e \overset{def.}{\equiv} \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}. \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n \overset{def.}{=} e.$$

Segue il teorema molto importante:

Teorema 3.1.9 (di Bolzano - Weierstrass). *Ogni successione reale limitata ammette una sotto-successione convergente.*

Più precisamente, per ogni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ per la quale esiste $M > 0$ tale che $|a_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha che esiste $k_n \nearrow$ tale che $a_{k_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$.

(Commentando la dimostrazione, avremo che essendo limitata sopra e sotto ed essendo una successione crescente, proprio per il fatto di avere sempre degli estremi, avremo che il limite esiste ed a_n è limitata ad n).
Un particolare tipo di successioni sono quelle *per ricorrenza*, per il fatto che avranno estremi superiori e inferiori *ciclicamente* sulle proprie sottosuccessioni.

Una particolare successione è la successione di Cauchy:

Definizione 3.1.5. Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ è detta *successione di Cauchy* se vale la seguente:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall\, n, m \in \mathbb{N}\, (n, m > \bar{n} \implies |a_n - a_m| < \varepsilon).$$

In altre parole, $\{a_n\}$ *è di Cauchy se i suoi termini sono "arbitrariamente" vicini tra loro, purché gli indici dei termini considerati siano abbastanza grandi.*

Proposizione 3.1.1. *Se* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, $a_n \to l \in \mathbb{R}$, *allora* $\{a_n\}$ *è di Cauchy.*

In altre parole, *ogni successione reale convergente è di Cauchy.*

Possiamo definire Cauchy come disuguaglianza triangolare delle successioni, quindi permette di dire che ogni coppia di successioni, se di Cauchy avranno approssimativamente lo stesso limite (stretto), che esiste grazie al fatto che l'insieme è limitato (Bolzano-Weierstrass).

Accenno a livello visivo → Ordini di confronto

Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ due successioni reali. Si dice che a_n è un *"o piccolo"* di b_n per $n \to +\infty$, ed in tal caso si scrive

$$a_n = o(b_n) \qquad (n \to +\infty),$$

se e solo se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ due successioni reali. Si dice che a_n è un *"O grande"* di b_n per $n \to +\infty$, ed in tal caso si scrive

$$a_n = O(b_n) \qquad (n \to +\infty),$$

se e solo se

$$\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}\ \exists\, M \in \mathbb{R}\ :\ \left(\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \le M \quad \forall\, n > \bar{n} \right).$$

Limiti di funzioni

Prima di introdurre i limiti, diciamo solo che, occasionalmente, gli estremi inf e sup possono corrispondere a +Inf o -Inf; dunque, si consideri possano far parte dei nostri intorni di analisi.

Il fatto naturale di <u>limite</u> considera che, per *x* che si avvicina ad un punto x_0, avremo che la funzione *f(x)* considerata si avvicina ad un punto λ.

Definizione 6.1.2. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$, $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$. Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$. Per definizione, $f(x)$ *tende a* λ *per* x *che tende a* x_0

$$\overset{def.}{\iff} \boxed{\forall\, V \in \mathscr{U}_\lambda \quad \exists\, W \in \mathscr{U}_{x_0} : f(x) \in V \quad \forall\, x \in A \setminus \{x_0\} \cap W}.$$

In tal caso si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda,$$

oppure si usano le scritture equivalenti $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \lambda$ o $f(x) \to \lambda$ per $x \to x_0$. Inoltre, se ciò avviene si dice che λ è il *limite di* f *per* $x \to x_0$.

Casi di interesse: (1) e (4) delle dispense.

Supponiamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$.

1) Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora $\mathscr{U}_\lambda = \{]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[: \varepsilon > 0\}$, $\mathscr{U}_{x_0} = \{]x_0 - \delta, x_0 + \delta[: \delta > 0\}$. Perciò

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 : f(x) \in]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[\\ \forall\, x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap (A \setminus \{x_0\}) \end{cases}$$

$$\iff \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 : \forall\, x \in A \setminus \{x_0\}\ (|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \lambda| < \varepsilon)$$

oppure

$$\iff \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 \text{ tale che } |f(x) - \lambda| < \varepsilon \text{ per ogni } x \in A \setminus \{x_0\},\ |x - x_0| < \delta.$$

Intendendo per ciascuno rispettivamente:

- x_0 deve essere punto di accumulazione
- ε è il raggio dell'intorno "J" di centro "l" i cui estremi sono "(l – ε)" ed "(l + ε)"
- δ è il raggio dell'intorno "I" di centro "x_0" i cui estremi sono "(x_0 - δ)" ed "(x_0 + δ)"

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c$$

se, comunque si sceglie un valore $\varepsilon > 0$ esiste un valore $\delta > 0$, dipendente dal ε scelto, tale che comunque si consideri $x \in Dom(f)$ in modo che

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

ne consegue che

$$|f(x) - c| < \varepsilon$$

4) $x_0 = +\infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora $\mathscr{U}_\lambda = \{]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[: \varepsilon > 0\}$, $\mathscr{U}_{x_0} = \mathscr{U}_{+\infty} = \{]M, +\infty[: M \in \mathbb{R}\}$. Pertanto

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lambda \iff \begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, M \in \mathbb{R} : |f(x) - \lambda| < \varepsilon \\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ x > M \end{cases}$$

oppure

$$\iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, M \in \mathbb{R} : \forall\, x \in \mathbb{R}\ (x > M \implies |f(x) - \lambda| < \varepsilon)\,.$$

Sia $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione con dominio superiormente illimitato, tale cioè da essere definita in un intorno di $+\infty$. Diciamo che per $x \to +\infty$ la funzione tende ad un valore c e scriviamc

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = c$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un valore $M > 0$, dipendente da ε, tale per cui se

$$x > M$$

risulta che

$$|f(x) - c| < \varepsilon$$

Il limite, quando esiste, è <u>unico</u>.

Teorema 6.2.1. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e siano $x_0 \in D(A)$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$. Se esistono λ, $\mu \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \quad e \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \mu$$

allora $\lambda = \mu$.

Inoltre, sappiamo che "quando il limite della funzione per un punto x_0 tende ad un valore, la funzione assume quel valore nel punto considerato x_0" → Località del limite.

Segue, inoltre, la definizione dei <u>limiti destro e sinistro</u>, dove normalmente sappiamo che tendendo da destra (+) o da sinistra (-) rispetto ad un punto x_0 oppure rispetto a +Inf o -Inf, allora i due limiti esistono finiti e tendono, *normalmente*, allo stesso valore.

Se $A := \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ e $B =]x_0, +\infty[$, oppure $B =]-\infty, x_0[$, allora *limite destro* (ds) e *limite a sinistro* (sn) di f in x_0 sono definiti ponendo[2]

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) := \lim_{x \to x_0} f_{|]x_0,+\infty[}(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) := \lim_{x \to x_0} f_{|]-\infty,x_0[}(x).$$

Segue dalla proposizione precedente che se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$ allora esistono $\lim_{x \to x_0^\pm} f(x)$ ed i limiti ds e sn coincidono.

Più semplicemente, il limite ds si definisce equivalentemente come segue:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 : (x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - \lambda| < \varepsilon)\,.$$

N.B. Per quanto riguarda il limite sn, sempre nel caso $\lambda \in \mathbb{R}$, nella definizione precedente si deve usare un intorno sn di x_0, ossia $x_0 - \delta < x < x_0$. Questa è l'unica modifica da fare.

Vediamo un esempio in cui il limite "non esiste".

Esempi. (Importante)

1. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) \overset{def.}{=} \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}.$

   Si ha
   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1.$$
   Pertanto
   $$\nexists \lim_{x\to 0} f(x).$$

2. Sia $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) \overset{def.}{=} \dfrac{1}{x}$. Si ha
   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty.$$
   Pertanto
   $$\nexists \lim_{x\to 0} f(x).$$

Si ha inoltre che se

- una successione tende per limite a x_0 allo stesso valore del limite di una funzione su x_0, funzione e successione convergono nel punto x_0

Diamo <u>i teoremi del limite di somma e prodotto</u>:

Teorema 6.2.3. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g\colon A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A) \cap \overline{\mathbb{R}}$. Valgono le seguenti affermazioni.*

1) $$\left.\begin{array}{l} f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \lambda \in \mathbb{R} \\ g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \mu \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \implies \begin{cases} f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \lambda + \mu & \textit{(somma)} \\ f(x) \cdot g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \lambda \cdot \mu & \textit{(prodotto)} \end{cases}.$$

Se inoltre $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \lambda \in \mathbb{R}$, $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$, $g(x) \neq 0$ in $A \setminus \{x_0\}$, allora

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} \frac{\lambda}{\mu}.$$

I casi fondamentali da segnalare sono la presenza delle forme $\frac{1}{0} = \infty$ *e* $\frac{1}{\infty} = 0$ ed altri "di contorno".

1)' Casi $\pm\infty$. *Se f e g hanno limite $\pm\infty$, segni concordi, per $x \to x_0$ allora il limite della somma è $+\infty$ (o $-\infty$); il limite del prodotto è il prodotto dei limiti (il segno è dato dal prodotto dei segni).*

2) *Se $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \pm\infty$, $f(x) \neq 0$ in $A \setminus \{x_0\}$, allora*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Se $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$, $f(x) > 0$ (< 0) in $A \setminus \{x_0\}$, allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty\ (-\infty).$$

3) *Se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in A \setminus \{x_0\}$ e se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ allora $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.*

3)' *Se $f(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \in A\setminus\{x_0\}$ e $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} -\infty$ allora $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} -\infty$.*

4) $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \lambda \implies |f(x)| \xrightarrow[x\to x_0]{} |\lambda|$.

Come per le successioni, si considera il teorema dei 2 Carabinieri stavolta per i limiti, concludendo che se una funzione è limitata superiormente ed inferiormente da altre due funzioni con lo stesso limite, anche lei avrà lo stesso limite.

Teorema 6.2.4 (2 carabinieri). *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A) \cap \overline{\mathbb{R}}$, $f, g, h\colon A \to \mathbb{R}$. Se esiste $W \in \mathscr{U}_{x_0}$ tale che*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \in (A \setminus \{x_0\}) \cap W$$

e se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, allora $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lambda$.

Per due funzioni vicine, vale inoltre il caso di Cauchy, quindi differiscono a meno di una costante (accenno).

Teorema 6.2.5 (Cauchy). *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A) \cap \overline{\mathbb{R}}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$. Sono equivalenti:*

1) $\exists\, \lambda \in \mathbb{R} : \lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda$;

2) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, W \in \mathscr{U}_{x_0} : \forall\, x, y \in A\setminus\{x_0\}\ (x, y \in W \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$.

Come prima, riprendiamo i concetti di *superiormente limitata, inferiormente limitata* e *limitata* nei rispettivi casi:

(questi inf e sup possono sempre essere, per la definizione a fianco anche +Inf o -Inf)

In simboli, nel primo caso si ha

$$\exists\, M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M \quad \forall\, x \in A.$$

Analogamente, nel secondo caso

$$\exists\, M \in \mathbb{R} : f(x) \geq M \quad \forall\, x \in A.$$

Infine, si dice che f è *limitata* se

$$\exists\, M > 0\ :\ |f(x)| \leq M \quad \forall\, x \in A.$$

Come per le successioni, se la funzione presenta lo stesso andamento (*monotonia*), si può avere la *crescenza/decrescenza* che, come discusso, può *essere stretta o non essere stretta*.

Definizione 6.3.2 (Monotonia). Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ ed $f\colon A \to \mathbb{R}$. Si dice che f è *monotona crescente* se

$$f(x) \leq f(y) \quad \forall\, x, y \in A,\, x \leq y.$$

Inoltre f è *monotona strettamente crescente* se

$$f(x) < f(y) \quad \forall\, x, y \in A,\, x < y.$$

N.B. Si dice che f è *monotona (strettamente) decrescente* se la precedente definizione vale con le disuguaglianze invertite.

Si usano le notazioni $f \nearrow$ ($\equiv f$ *crescente*) oppure $f \searrow$ ($\equiv f$ *decrescente*).

Da questo ne consegue che i limiti destri e sinistri possono tendere ai loro estremi *sup* ed *inf*.
A pagina successiva, i limiti notevoli.

analisi

Limiti notevoli

funzioni goniometriche	
$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$
$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}=0$	$\lim_{x\to 0}\frac{arcsenx}{x}=1$
$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2}=\frac{1}{2}$	$\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$

funzioni esponenziali e logaritmiche		
$\lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$	$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$	
$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$	$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=1$	
$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=lna$	$\lim_{x\to 0^+}x^\alpha\, ln\, x=0$; $\lim_{x\to +\infty}\frac{ln\, x}{x^\alpha}=0$	$\alpha>0$
$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$	$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=0$; $\lim_{x\to +\infty}\frac{ln\, x}{a^x}=0$	$a>1$
$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$	$[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\cdot ln[f(x)]}$	l' uguaglianza a sinistra può essere utile per risolvere alcuni limiti che si presentano nelle forme indeterminate 0^0 $1^{\pm\infty}$ $+\infty^0$

ad ogni limite notevole si possono applicare le seguenti proprietà che lasciano invariato il risultato			
limite iniziale	se il testo del limite è invertito anche il risultato sarà invertito	se nel limite al posto di x c'è **nx** il risultato del limite resta lo stesso	se il testo del limite è invertito anche il risultato sarà invertito
$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{x}{senx}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{sen\, nx}{nx}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{nx}{sen\, nx}=1$

frazioni equivalenti			
per il calcolo dei limiti notevoli può essere utile ricordare alcune delle possibili operazioni con le frazioni:			
scomporre la frazione iniziale in due frazioni	dividere ogni monomio del numeratore e del denominatore per la stessa quantità **n**	moltiplicare e dividere la fra- zione per la stessa quantità **n**	moltiplicare e dividere il numeratore per **n** e/o moltiplicare e dividere il denominatore per **m**
$\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}$	$\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{n}}{\frac{b}{n}}$	$\frac{a}{b}=\frac{a}{b}\cdot\frac{n}{n}$	$\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{n}\cdot n}{\frac{b}{m}\cdot m}$
$\frac{a\cdot b}{c\cdot d}=\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}$	$\frac{a\cdot b}{c\cdot d}=\frac{\frac{a\cdot b}{n}}{\frac{d\cdot c}{n}}$	$\frac{a\cdot b}{c\cdot d}=\frac{a\cdot b}{c\cdot d}\cdot\frac{n}{n}$	$\frac{a\cdot b}{c\cdot d}=\frac{\frac{a\cdot b}{n}}{\frac{d\cdot c}{n}}$
$\frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{c+d}+\frac{b}{c+d}$	$\frac{a+b}{c+d}=\frac{\frac{a}{n}+\frac{b}{n}}{\frac{c}{n}+\frac{d}{n}}$	$\frac{a+b}{c+d}=\frac{(a+b)}{(c+d)}\cdot\frac{n}{n}$	$\frac{a+b}{c+d}=\frac{\frac{a}{n}+\frac{b}{n}}{\frac{c}{n}+\frac{d}{n}}$
$\frac{a\cdot b}{c+d}=a\cdot\frac{b}{c+d}$	$\frac{a\cdot b}{c+d}=\frac{\frac{a\cdot b}{n}}{\frac{c}{n}+\frac{d}{n}}$	$\frac{a\cdot b}{c+d}=\frac{a\cdot b}{(c+d)}\cdot\frac{n}{n}$	$\frac{a\cdot b}{c+d}=\frac{\frac{a\cdot b}{n}}{\frac{c}{n}+\frac{d}{n}}$

v 3.3 1 di 1

Funzioni continue

SI definisce funzione continua è una funzione reale di variabile reale in cui i limiti destro e sinistro calcolati nel punto coincidono con la valutazione della funzione del punto.
La definizione data considera che x_0 sia punto di accumulazione o punto isolato e:

$$f \text{ è } \textit{continua} \text{ in } x_0 \overset{def.}{\iff}$$

$$\forall V \in \mathscr{U}_{f(x_0)}\, \exists W \in \mathscr{U}_{x_0} : \forall x \in A\, (x \in W \implies f(x) \in V).$$

$$\text{ossia} \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x \in A\; (|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)\,.$$

La funzione f si dice *continua* in A se lo è in ogni $x_0 \in A$. In questo caso si scrive $f \in C(A)$, oppure $f \in C(A, \mathbb{R}) \overset{def.}{=} \{f \colon A \to \mathbb{R} : f \text{ continua}\}$.

Da questo vi sono due conseguenze importanti:

- Se x_0 non appartiene al dominio di A, allora f è continua in x_0 e l'unico punto in grado di rendere continua f(x) è proprio x = x_0

1. Se $x_0 \notin D(A)$ allora f è continua in x_0, quale che sia f.
   Infatti
   $$x_0 \notin D(A) \implies \exists W \in \mathscr{U}_{x_0} : A \cap W = \{x_0\}.$$
   Pertanto per ogni $V \in \mathscr{U}_{f(x_0)}$ si ha $f(x) \in V$ se $x \in A \cap W$, dato che
   $$x \in A \cap W \iff x = x_0.$$

- La funzione è continua nel suo punto di accumulazione se f(x) coincide con la valutazione del limite nel punto considerato x_0

2. Se $x_0 \in D(A)$ allora f è continua in x_0 se e solo se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Come sempre, valgono i teoremi di somma, prodotto, reciproco di funzioni continue, in maniera similare a quelli dei limiti.

Teorema 7.1.1. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g \in C(A)$. Allora:*

1) $f + g \in C(A)$;

2) $f \cdot g \in C(A)$;

3) *se* $g \neq 0$ *in* A *allora* $\dfrac{f}{g} \in C(A)$;

4) $|f| \in C(A)$.

Similmente, vale che il limite di una successione continua tenda, per limite, a x_0 e anche la funzionevalutata nel punto tenda, per continuità, al punto stesso x_0.

Teorema 7.1.2. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, $f \colon A \to \mathbb{R}$. Allora*

$$f \textit{ continua in } x_0 \iff \forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A,\ x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0 \textit{si ha} \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

(Per la dimostrazione abbiamo che, anche prendendo un valore più piccolo a cui tende il limite, la successione è continua e, comunque, tende allo stesso limite, quindi ad x_0.
Inoltre, per il secondo punto, volendo provare la continuità, si ipotizza per assurdo che la funzione non sia continua; tuttavia, abbiamo che la successione x_n sarà sempre maggiorata, per completezza dei reali, da una certa quantità sommata/sottratta ad x_0, contraddicendo il fatto che x_n non sia continua).

Due teoremi importanti:

- La composizione, avendo che se abbiamo due funzioni *f* e *g* in due insiemi A e B, se tendono allo stesso limite, per continuità, possiamo ipotizzare valga:

  Teorema 7.1.3 (composizione). *Siano $f \in C(A)$, $g \in C(B)$ dove $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Se $f(A) \subseteq B$, allora $g \circ f \in C(A)$.*

  (La dimostrazione afferma banalmente che essendo entrambe continue, il limite si basa sullo stesso punto di accumulazione e ciò conclude la prova).

- Weierstrass, per cui se A è insieme compatto e la funzione *f* appartiene al compatto C(A), allora possiede massimo e minimo.

  Teorema 7.1.4 (Weierstrass). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un compatto. Se $f \in C(A)$ allora f ha* max *e* min *su A.*

  (La dimostrazione verte sul fatto di considerare la tendenza agli estremi *inf* e *sup* e, per compattezza, esiste sempre una sottosuccessione che, per continuità, tende proprio ad x_0. Per l'unicità del limite, esso rimarrà sempre tale, quindi coincidendo con *inf* o con *sup*).

Altro risultante importante è decisamente *il teorema di Bolzano*.

Teorema 7.2.1 (Bolzano). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ e sia $f \in C([a, b])$ (cioè $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua) tale che $f(a) \cdot f(b) \leq 0$. Allora esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = 0$.*

(La dimostrazione, spiegata a parole, considera di prendere *c*, punto medio di [a, b]. Non potendo sempre valere f(c) = 0, allora avremo che bisognerà porre f(a) * f(c) ≤ 0 oppure f(b) · f(c) ≤ 0.
Questo ci porta ad avere due variabili a_1 e b_1 che possono essere (a,c) oppure (c,b). Essendo che tendono ad un nuovo punto medio in (b-a)/2, allora, poniamo c_1 questo nuovo punto medio.
Induttivamente, si ha lo stesso ragionamento; ciò fa supporre che le successioni siano limitate, rispetto ad *a* e rispetto a *b*, generando quindi a_n e b_n.
Si avrà quindi che il punto medio delle successioni tende a 0, valendo il teorema).

Importante, allo stesso modo il *teorema dei Valori intermedi*. Conseguenza a questo, alcune funzioni possono non avere massimo e minimo e nella loro valutazione, considerano gli estremi *inf* e *sup*.

Corollario 7.2.1 (Teorema dei Valori Intermedi). *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f \in C(I)$, f non costante. Allora per ogni $x_1, x_2 \in I$ tali che $f(x_1) < f(x_2)$ e per ogni $y \in]f(x_1), f(x_2)[$ esiste $x \in I$ tale che $f(x) = y$.*

(La dimostrazione considera che, avendo due punti diversi x_1 e x_2, allora, avremo che il limite di x_0 è pari a 0 per una delle due funzioni e, per l'altra, si abbia che in x_0 si abbia la funzione. Questo significa che la valutazione di una funzione considera che esista almeno un punto intermedio di valutazione).

A questo punto, solo un accenno alla *continuità uniforme*, tale che una funzione definita su due valori (x,y) presenta una continuità a coppia (quindi, se *x* varia, varia anche *y*). Ogni insieme compatto è uniformemente continuo.

Essendo un intermezzo, anche se già presente sopra, i grafici delle funzioni esponenziale e logaritmiche. Si considera che la base del logaritmo (a) sia sempre e, numero di Nepero (vedi sopra).

Notazione. D'ora in poi se $a = e$ scriveremo equivalentemente

$$\log_e,\ \lg,\ \log,\ \ln$$

per indicare il cosiddetto "logaritmo naturale" (ossia in base e).

Grafici di esponenziali e logaritmi

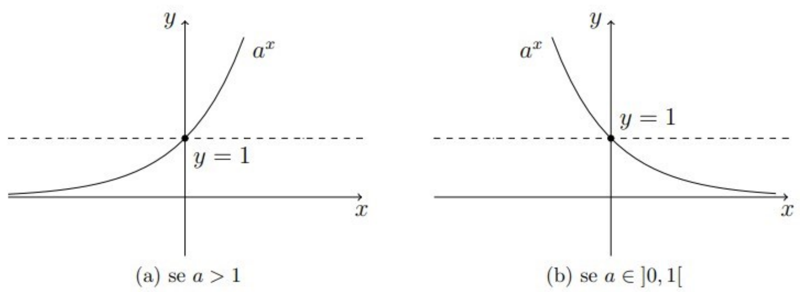


Figura 8.1: Grafici della funzione esponenziale a^x

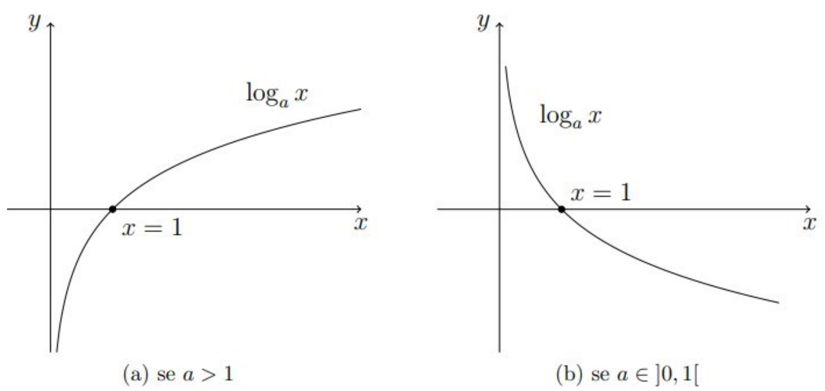


Figura 8.2: Grafici della funzione logaritmica $\log_a x$

Calcolo differenziale

Il rapporto incrementale è il rapporto tra la variazione di ordinate e la variazione di ascisse definite a partire da una certa quantità *h.* Similmente, da qui si ha la definizione di derivata, intesa come limite del rapporto incrementale della funzione nel punto al tendere dell'incremento a zero.

Siano[1] $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A \cap D(A)$ ed $f\colon A \to \mathbb{R}$. Il *rapporto incrementale* di f di punto iniziale x_0 è la funzione

$$R_f(x_0)\colon A \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}, \quad R_f(x_0)(x) \overset{def.}{=} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Si dice che f è *derivabile* in x_0 se esiste finito il seguente limite:

$$\lim_{x \to x_0} R_f(x_0)(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad (\in \mathbb{R}) \tag{9.1}$$

Questo limite si chiama *derivata* di f in x_0. Si pone

$$f'(x_0) \overset{def.}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Altre notazioni usate di frequente sono

$$Df(x_0), \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0}, \quad \dot{f}(x_0), \dots$$

Equivalentemente a sopra, si ha quest'altra notazione sotto, che pone semplicemente $h = x - x_0$.

Osservazione 9.1.1. Il limite (9.1) è equivalente al seguente

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad (\text{porre } h = x - x_0).$$

(Abbiamo che per continuità la seconda è equivalente alla prima e si ha l'utilizzo di una funzione infinitesima che rende l'equivalenza possibile; abbiamo inoltre che la prima viene sempre preferita a quest'ultima).

Altra sottigliezza, ma importante:

Corollario 9.1.1. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A \cap D(A)$, $f\colon A \to \mathbb{R}$. Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.*

Dimostrazione. Dalla (9.2) si ottiene che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ e la tesi segue poiché x_0 è un punto di accumulazione di A. □

Osservazione 9.1.2 (Importante). *Non è vero il viceversa.* Cioè esistono funzioni continue non derivabili. Per esempio, la funzione modulo

$$f(x) = |x|.$$

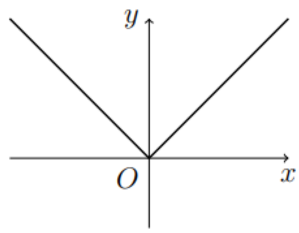


Grafico di f(x) = |x|

Qui definiamo poi, i teoremi su somma, prodotto, reciproco di derivate:

Teorema 9.1.1. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A \cap D(A)$, $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ derivabili in x_0. Allora:*

1) *$f+g$ è derivabile in x_0 e si ha*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2) *$f \cdot g$ è derivabile in x_0 e si ha (regola Leibniz)*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0);$$

3) *se $g(x_0) \neq 0$ allora $\dfrac{f}{g}$ è derivabile in x_0 e si ha*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

(Le dimostrazioni sono prove calcolose, dunque algebriche, usando il rapporto incrementale).

Utilissimo anche il teorema di composizione di funzioni derivabili, graficamente confuso ma indica che la derivata della funzione composta (chiamata così proprio perché formata da almeno due funzioni, quindi del tipo h(x) = g(f(x))) è data dalla derivata della funzione più esterna, *con argomento invariato*, moltiplicata per la derivata della funzione più interna.

Teorema 9.1.2. *Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $g\colon B \to \mathbb{R}$, $f(A) \subseteq B$. Sia $x_0 \in A \cap D(A)$ e sia f derivabile in x_0. Assumiamo che $f(x_0) \in D(B)$ e che g sia derivabile in $f(x_0)$. Allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e vale*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

(Similmente, la dimostrazione verte sulla comune convergenza a 0 del calcolo della derivata e conseguente rapporto incrementale tendente alla funzione stessa).

Viene poi esposta la derivata della funzione inversa, dove banalmente vale che consente di calcolare la derivata dell'inversa senza conoscere l'espressione analitica dell'inversa (senza quindi doverla calcolare). Da questa consegue che da esponenziale si passa a logaritmo, che esistano le funzioni *tangente, arcotangente*, ecc.

Teorema 9.1.3. *Siano $I \neq \varnothing$ un intervallo non vuoto, $f\colon I \xrightarrow[1-1]{} \mathbb{R}$, $f \in C(I)$ (ossia continua e iniettiva). Sia $x_0 \in I$ e sia f derivabile in x_0 con $f'(x_0) \neq 0$. Allora l'inversa $f^{-1}\colon f(I) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $f(x_0)$ $\left(\overset{def.}{=} y_0\right)$ e si ha*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

(La dimostrazione considera proprio la convergenza della funzione all'inversa per cui, ragionando sul rapporto incrementale normale ed inverso, si ha convergenza alla stessa funzione e alla derivata in x_0).

A questo punto, occorre enunciare la presenza di punti di *massimo/minimo relativo*, quindi considerato rispetto ad un intervallo del punto x_0, non su tutto l'intervallo (in tal caso, saremmo in *massimo/minimo assoluto*).

Definizione 9.1.1. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Si dice che x_0 è *punto di minimo (massimo) relativo per* f se

$$\exists\, \rho > 0 \ :\ f(x) \geq f(x_0) \text{ (risp. } \leq) \quad \forall\, x \in\,]x_0 - \rho, x_0 + \rho[.$$

Vale anche il *primo teorema di Fermat*, che discute l'esistenza del *punto stazionario* (se esiste massimo o minimo relativo, la derivata nel punto equivale a 0):

Teorema 9.1.4. *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}$ *e sia* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *derivabile. Sia* $x_0 \in \mathring{A}$ *(cioè nell'interno di* A*, ossia esiste un intorno di* x_0 *tutto incluso in* A*). Se* x_0 *è punto estremante relativo (cioè* min *o* max *relativo) allora* $f'(x_0) = 0$.

(La dimostrazione afferma che i rapporti incrementali destro e sinistro sono <= o >= a 0, pertanto risultando globalmente pari a 0).

Questo teorema permette di ricavare tutte le derivate fondamentali:

derivate delle funzioni elementari	
$D\,k = 0$ dove k è una costante	$D\,senx = cosx$
$D\,x^n = n\,x^{n-1}$	$D\,cosx = -\,senx$
$D\,\frac{1}{x^n} = Dx^{-n} = -\,n\,x^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$D\,tgx = \frac{1}{cos^2 x} = 1 + tg^2 x$
$D\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$D\,cotgx = -\frac{1}{sen^2 x} = -1 - cotg^2 x$
$D\,\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D\,arcsenx = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$D\,log_a x = \frac{1}{x} log_a e = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{lna}$	$D\,arccosx = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$D\ln x = \frac{1}{x}$	$D\,arctgx = \frac{1}{1+x^2}$
$D\,a^x = a^x \ln a = a^x \cdot \frac{1}{log_a e}$	$D\,arccotgx = -\frac{1}{1+x^2}$
$D\,e^x = e^x$	$D\,\lvert x\rvert = \frac{x}{\lvert x\rvert} = \frac{\lvert x\rvert}{x}$

Abbiamo successivamente il <u>teorema di Rolle</u>, che afferma, partendo da una funzione costante e due funzioni uguali tra di loro, esse convergono in un punto *c* appartenente ad entrambe in cui si annulla la derivata (dimostrazione spiegata a parole con questo fatto).

Teorema 9.2.1 (Rolle). *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *ed* $f \in C([a,b])$. *Sia inoltre* f *derivabile in* $]a,b[$. *Se* $f(a) = f(b)$ *allora*

$$\exists\, c \in\,]a,b[\ :\ f'(c) = 0.$$

Il teorema di Rolle implica che una coppia di funzioni possa avere punto medio, tale che la derivata di una delle due funzioni equivalga alla valutazione delle funzioni nel punto medio. Questo è il teorema di Lagrange (anche qui, dimostrazione spiegata a parole così).

Teorema 9.2.2 (Valor medio o Lagrange). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C([a,b])$ e f derivabile su $]a,b[$. Allora*

$$\exists\, c \in \,]a,b[\; : \; \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

La conseguenza di Rolle e Lagrange può valere su coppie di funzioni ed intervalli, risultando nel teorema di Cauchy (che non approfondiamo, ma accenniamo).

Avremo però che una funzione è definita:
- *monotona crescente* se la derivata prima è >= 0
- *monotona crescente strettamente* se la derivata prima è >= 0 e f'(x) = 0 e non ha punti interni
- *monotona decrescente* se la derivata prima è <= 0
- *monotona decrescente strettamente* se la derivata prima è <= 0 e f'(x) = 0 e non ha punti interni

(Le dimostrazioni conseguono esclusivamente dalla valutazione dei rapporti incrementali, portando a considerare un intervallo maggiore/minore/uguale al punto e valendo le 4 ipotesi).

Ben più utile è il teorema di de l'Hopital, che vale per la forma indeterminata (0/0)

Teorema 9.2.6 (Hôpital). *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto e sia $a \in D(I)$. Siano $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ derivabili in ogni punto di $I \setminus \{a\}$ e sia $g'(x) \neq 0$ su $I \setminus \{a\}$. Sia inoltre*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

oppure

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = \lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty.$$

Allora, se esiste $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ esiste $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ e si ha

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Teorema 9.2.7 (Hôpital: forma indeterminata $\frac{0}{0}$). *Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathring{I}$ (cioè interno ad I). Per esempio, sia $I = [a,b]$, con $a < b$, e sia $a < x_0 < b$. Allora se $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ sono derivabili in x_0 e nulle in x_0 e se $g'(x_0) \neq 0$ si ha*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(La dimostrazione considera che valgano i rapporti incrementali a coppie su f(x) e g(x) che tendono allo stesso limite rispetto ad una variante dei rapporti che sottraggono x_0, quantità che permette la differenza tra f(x) e g(x) e, di fatto, tendente a 0).

È possibile generalizzare induttivamente il calcolo del rapporto incrementale, ottenendo le *derivate successive*.

La *derivata seconda* di f in x_0, se esiste, è data da

$$(f')'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{(f')(x) - (f')(x_0)}{x - x_0} \quad (\in \mathbb{R})$$

Banalmente, abbiamo le seguenti affermazioni su funzioni derivabili:

Teorema 9.7.1. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo non banale e sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su I. Allora*

$$f \text{ convessa} \iff f' \nearrow \text{ (ossia } f' \text{ è monotona crescente).}$$

Corollario 9.7.1. *Se $f: I \to \mathbb{R}$ è derivabile due volte su I allora*

$$f \text{ è convessa} \iff f''(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in I.$$

(Banalmente, per converso, avremo che):

- f concava se f' è monotona decrescente
- f concava → f'' (x) <= 0

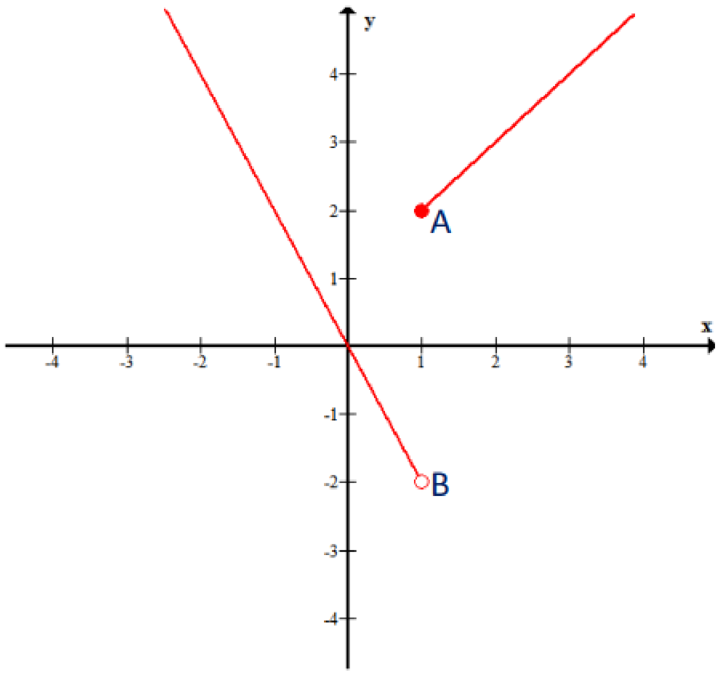
Un punto x_0 di un intervallo [a, b] si dice <u>punto di discontinuità</u> per una funzione f(x) se la funzione non è continua in x_0.

Un punto x_0 si dice <u>punto di discontinuità di prima specie</u> per la funzione f(x) quando, per x → x_0 il limite destro e il limite sinistro di f(x) sono entrambi finiti ma diversi fra loro.

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = l_1 \neq \lim_{x \to x_0+} f(x) = l_2$$

La differenza $|l_2 - l_1|$ si dice **salto** della funzione.

$$f(x) = \begin{cases} -2x \text{ se } x < 1 \\ x + 1 \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

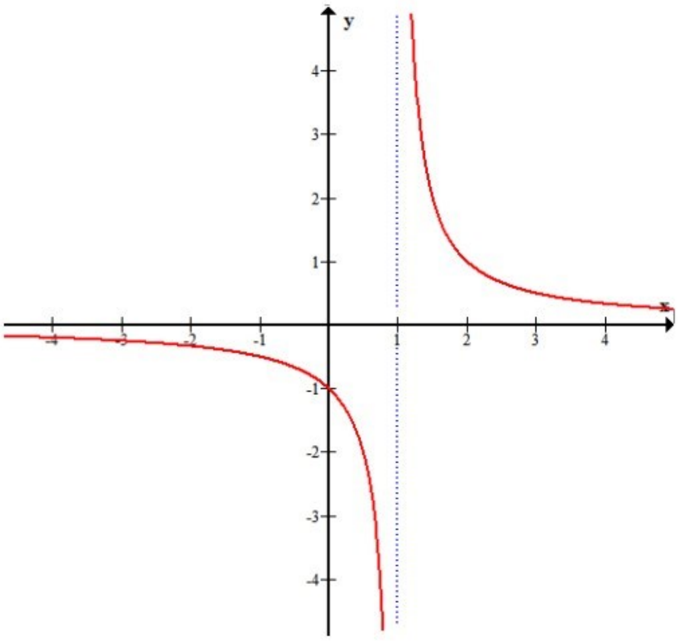


$$\lim_{x \to 1^-} (-2x) = -2 \qquad e \qquad \lim_{x \to 1^+} (x+1) = 2$$

Nel punto $x_0 = 1$ la funzione ha una discontinuità di prima specie. Il salto della funzione nel punto vale: $|2-(-2)| = 4$

Un punto si dice <u>punto di discontinuità di seconda specie</u> per la funzione f(x) quando, per x → x_0 almeno uno dei due limiti, destro o sinistro, di f(x) è infinito o non esiste.

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$



La funzione nel punto $x_0 = 1$ ha una discontinuità di seconda specie, perchè risulta:

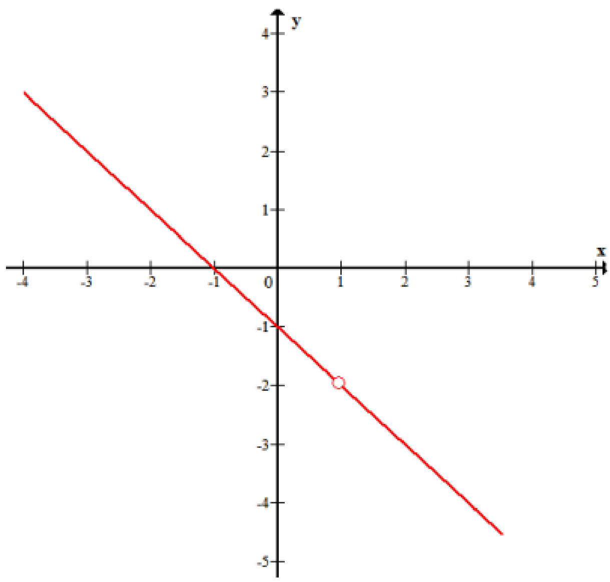
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \quad e \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

Un punto si dice punto di <u>discontinuità di terza specie (o eliminabile)</u> per la funzione f(x) quando:

1) esiste ed è finito il limite di f(x) per ossia x → x_0 ossia $\lim_{x\to x0} f(x) = l$
2) la funzione non è definita in x_0 oppure, se lo è, risulta $f(x_0) \neq l$

Esempio n.1

$$f(x) = \frac{1-x^2}{x-1}$$



La funzione è discontinua in $x_0 = 1$ perché $f(1)$ non esiste.

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+x)}{-(1-x)} = -2$$

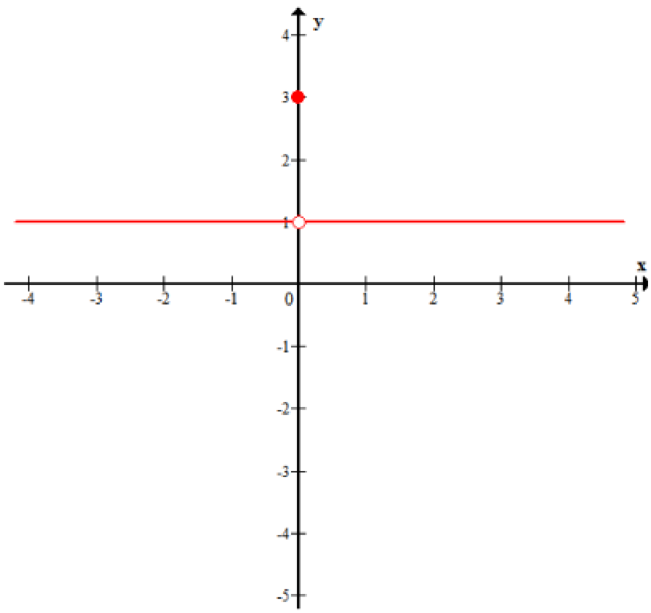
La discontinuità è di terza specie; la discontinuità è solo *apparente*. Il salto tra i due limiti sinistro e destro è nullo.

La discontinuità si può eliminare definendo la funzione anche nel punto $x_0 = 1$ ponendo $f(1) = -2$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{x-1} & se\ x \neq 1 \\ -2 & se\ x = 1 \end{cases}$$

Esempio n.2

$$f(x) = \begin{cases} 1\ se\ x \neq 0 \\ 3\ se\ x = 0 \end{cases}$$



Nel punto $x_0 = 0$ la funzione presenta una discontinuità di terza specie in quanto è definita, essendo $f(0) = 3$, ma risulta:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

Come conseguenza dei teoremi dei limiti e derivate successive, possiamo ottenere gli sviluppi di Taylor.

Questo sviluppo è fondamentale perché permette di capire lo sviluppo di funzioni nell'intorno di un punto come polinomio ad infiniti termini, studiando le caratteristiche delle funzioni interessate.
Si parte dalla *formula di Taylor*:

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione, sia $x_0 \in (a, b)$ e supponiamo che esistano le derivate $f^{(1)}(x_0), f^{(2)}(x_0), \ldots, f^{(n-1)}(x_0)$. Preso h tale che f sia definita in $[x_0 - h, x_0 + h]$ (intorno chiuso di centro x_0 e raggio h), vale la formula

$$f(x_0 + h) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} h^i + R_n(h)$$

o, equivalentemente, prendendo $x = x_0 + h$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i + R_n(x)$$

dove R_n è un'opportuna funzione, detta **resto di ordine n**, mentre x_0 è detto **centro dello sviluppo**.

Generalmente essa ha due tipi di resti:

- il resto di Peano, detto *o piccolo* ed individua una funzione qualsiasi che nell'intorno di x_0 tende a zero più velocemente di $(x - x_0)^n$

Nelle ipotesi della formula di Taylor, e con l'ipotesi aggiuntiva che esista $f^n(x_0)$, vale la formula

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^i(x_0)}{i!} (x - x_0)^i + \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o[(x - x_0)^n]$$

dove il resto di Peano di ordine n è dato da

$$R_n(x) = o[(x - x_0)^n]$$

Il termine $o[(x - x_0)^n]$, dove $o(\cdot)$ indica l'o-piccolo, è dato da una qualsiasi funzione $g(x)$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

- il resto di Lagrange, che fornisce informazioni quantitative sul resto, sapendo che la valutazione della derivata n-esima conduce ad una rappresentazione esatta

Nelle ipotesi della formula per lo sviluppo in serie di Taylor, e con l'ulteriore ipotesi che esista la derivata $f^{(n)}(x_0)$, (allora) esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - x_0)^n$$

dove

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - x_0)^n$$

è detto **resto di Lagrange**.

Evidenziamo ora tutti gli sviluppi notevoli:

Sviluppo di Taylor-Mc Laurin della funzione esponenziale

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \ \forall x \in \mathbb{R}$$

in forma compatta

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Sviluppo di Taylor-Mc Laurin della funzione logaritmica

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + o(x^n) \quad \text{per } |x| < 1$$

in forma compatta

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \ \text{per } |x| < 1$$

Sviluppo di Taylor-Mc Laurin del seno

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

In forma estesa,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

Sviluppo di Taylor-Mc Laurin del coseno

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

In forma estesa:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

Sviluppo di Taylor-Mc Laurin dell'arcoseno

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40} x^5 + \frac{5}{112} x^7 + \frac{35}{1152} x^9 + o(x^9) \quad \text{per } |x| < 1$$

Sviluppo di Taylor-Mc Laurin dell'arcocoseno

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40} x^5 - \frac{5}{112} x^7 - \frac{35}{1152} x^9 + o(x^9) \quad \text{per } |x| < 1$$

Sviluppo di Taylor-Mc Laurin dell'arcotangente

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + o(x^9) \text{ per } |x| < 1$$

Anche nel caso delle funzioni iperboliche riportiamo lo sviluppo troncato

Sviluppo di Taylor-Mc Laurin del seno iperbolico

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} + o(x^9)$$

Sviluppo di Taylor-Mc Laurin del coseno iperbolico

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} + o(x^9)$$

Il calcolo concreto dello sviluppo avviene usando la formula con il resto di Peano:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

Con $f^{(k)}(x_0)$ intendiamo la derivata k-esima della funzione $f(x)$ valutata nel punto x_0, e con il simbolo $n!$ intendiamo invece il fattoriale di n.

Ad esempio:

Calcoliamo lo sviluppo in serie di Taylor di ordine 4 e nel punto x_0 della funzione

$$f(x) = \sin(x^2)$$

In questo caso l'ordine dello sviluppo è $n = 4$, inoltre il centro dello sviluppo è $x_0 = 0$. Sotto le condizioni fornite dalla traccia, la formula di Taylor è data da

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + o(x^4)$$

Calcoliamo le derivate successive della funzione e valutiamole nel centro:

$$\begin{aligned}
&f(x) = \sin(x^2) && \longrightarrow \quad f(x_0) = f(0) = 0 \\
&f'(x) = 2x\cos(x^2) && \longrightarrow \quad f'(x_0) = f'(0) = 0 \\
&f''(x) = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2) && \longrightarrow \quad f''(x_0) = f''(0) = 2 \\
&f'''(x) = -8x^3\cos(x^2) - 12x\sin(x^2) && \longrightarrow \quad f'''(x_0) = f'''(0) = 0 \\
&f^{(4)}(x) = -48x^2\cos(x^2) - 12\sin(x^2) + 16x^4\sin(x^2) && \longrightarrow \quad f^{(4)}(x_0) = f^{(4)}(0) = 0
\end{aligned}$$

A questo punto rimpiazziamo nella formula di Taylor i termini che abbiamo calcolato in precedenza.

$$f(x) = 0 + 0x + \frac{2}{2}x^2 + 0x^3 + 0x^4 + o(x^4) =$$

$$= x^2 + o(x^4)$$

Calcolo integrale

Per parlare di integrale, cominciamo col considerare il concetto di *scomposizione*, tale che si abbia un insieme finito e ordinato di punti in cui caratterizziamo una *misura*, quindi una sommatoria che tende a (b – a).

Definizione 10.1.1. Si chiama *scomposizione* di $I = [a, b]$, un sottoinsieme finito σ di $[a, b]$ tale che $a, b \in \sigma$.

D'ora in avanti penseremo a σ come ad un insieme ordinato di punti

$$\sigma = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\} \quad \text{dove } x_0 = a,\ x_n = b$$

e si assume che $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$.

Sia $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ per $k = 1, \ldots, n$. Per definizione, si pone

$$\text{mis}(I_k) = x_k - x_{k-1} \quad \text{per } k = 1, \ldots, n.$$

Risulta

$$\sum_{k=1}^{n} \text{mis}(I_k) = b - a.$$

Infatti $\sum_{k=1}^{n} \text{mis}(I_k) = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = b - a.$

Il simbolo "mis" significa (e si legge) "*misura*".

Questi termini sono utili per considerare l'insieme dei punti nell'operazione di integrale, limitati, in particolare somme di punti che caratterizzano aree.
Data una scomposizione, infatti, noi ne consideriamo il valore *max* e, ognuna di queste, può diventare più *fine* qualora aggiunga almeno un altro punto o un'altra misura, affinando il risultato del calcolo.
Avendo massimo, le scomposizioni sono *limitate* (se non lo fossero, le somme tenderebbero ad infinito e, successivamente, l'integrale non sarebbe definito).

Da qui, consideriamo le *somme superiori* e *inferiori*, che semplicemente sono date dal prodotto degli estremi inferiore e superiore per la relativa scomposizione.

Definizione 10.1.2 (Somme superiori ed inferiori)**.** Sia

$$\sigma = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\} \in \Omega_{[a,b]}.$$

Allora

$$S(f,\sigma) \stackrel{def.}{=} \sum_{k=1}^{n} \sup_{I_k} f \cdot \text{mis}(I_k)$$

si dice *somma superiore* di f su $[a,b]$ relativa alla scomposizione σ.
Analogamente, si pone

$$s(f,\sigma) \stackrel{def.}{=} \sum_{k=1}^{n} \inf_{I_k} f \cdot \text{mis}(I_k)$$

e si dice *somma inferiore* di f su $[a,b]$ relativa alla scomposizione σ.

Dalla definizione possiamo vedere due cose:

1) La somma inferiore è minore/uguale di quella superiore $\quad s(f,\sigma) \leq S(f,\sigma) \quad \forall\, \sigma \in \Omega_{[a,b]}.$

2) Gli estremi sono finiti e si equivalgono (*inf* e *sup*) una volta calcolate le somme

$$\inf_{[a,b]} f \cdot (b-a) \leq s(f,\sigma) \leq \sup_{[a,b]} f \cdot (b-a)$$

$$\inf_{[a,b]} f \cdot (b-a) \leq S(f,\sigma) \leq \sup_{[a,b]} f \cdot (b-a).$$

L'integrale stesso viene dunque definito come una sommatoria, in particolare:

- L'estremo superiore della somma inferiore è l'*integrale inferiore*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \stackrel{def.}{=} \sup\left\{s(f,\sigma) : \sigma \in \Omega_{[a,b]}\right\}$$

e lo chiamiamo *integrale inferiore* di f su $[a,b]$.

- L'estremo inferiore della somma superiore è l'*integrale superiore*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \stackrel{def.}{=} \inf\left\{S(f,\sigma) : \sigma \in \Omega_{[a,b]}\right\}$$

e lo chiamiamo *integrale superiore* di f su $[a,b]$.

Entrambi sono numeri reali e finiti e l'integrale inferiore è minore/uguale a quello superiore.
Ciò non è sempre verificato; in casi particolari (funzione di Dirichlet), avremo che l'integrale inferiore è diverso dall'integrale superiore e la funzione non è integrabile.

L'integrale secondo Riemann afferma invece che una funzione sia considerata integrabile se, date tutte le considerazioni precedenti, l'integrale inferiore e superiore si equivalgono (la somma delle aree sopra e sotto la funzione sono uguali).

Definizione 10.1.3. Una funzione limitata $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è *integrabile secondo Riemann* su $[a,b]$ se

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

D'ora in poi, se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{def.}{=} \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Il valore comune di queste quantità (coincidente col primo membro) si chiama *integrale* di f su $[a,b]$.

Similmente, avremo che tra due punti, di cui uno sottoinsieme dell'altro, anche le relazioni d'ordine delle somme vengono mantenute (se il primo è minore del secondo, anche la somma inferiore/superiore del primo sarà minore del secondo).
Da qui consegue che, in generale, l'estremo inferiore è minore/uguale all'estremo superiore.

La seguente definizione, basata sulle ultime considerazioni, è più interessante. Infatti, una funzione integrabile secondo Riemann e limitata prevede che la differenza tra la somma superiore e inferiore sia minore di una costante ε, cioè esse saranno sempre equamente distanti tra di loro.

Teorema 10.1.1 (Riemann). *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Allora*

$$f \in \mathscr{R}_{[a,b]} \overset{equivale}{\iff} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \sigma \in \Omega_{[a,b]} : S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \varepsilon.$$

(La dimostrazione, infatti verifica che l'integrale calcolato sopra e sotto, somma o differenzia ε/2, massima distanza tra i due estremi. Pertanto, mettendo insieme la disuguaglianza vista sopra, cioè la somma superiore meno la somma inferiore < ε, avremo che gli integrali coincidono a ε nel calcolo.
Da ciò ne consegue che l'integrale si mantiene uguale dappertutto, per ε > 0).

$$\underbrace{\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx}_{\text{sono allora tutti uguali tra loro}} \iff f \text{ integrabile.}$$

Avremo inoltre che se la funzione è continua e integrabile, essa esiste nell'insieme reale.
Abbiamo anche che la decomposizione, quindi il sottoinsieme di punti su cui esistono la somma superiore e inferiore, tende a 0. Ciò significa che, in generale, *un integrale converge*.
In particolare, da quest'ultima osservazione, deduciamo che ai limiti:

$$\lim_{|\sigma|\to 0} S(f,\sigma) = \int_a^b f,$$

$$\lim_{|\sigma|\to 0} s(f,\sigma) = \int_a^b f.$$

Se la funzione fosse limitata ma non continua, comunque, la funzione appartiene all'insieme dei numeri reali. Questa osservazione è utile perché permette di calcolare, negli esercizi, integrali che, anche se non continui in un punto, sfruttando lo "spezzare" in somma, riescono ad avvicinarsi ad un risultato.

Valgono le successive proprietà di <u>somma, prodotto per una costante, confronto e valore assoluto per integrali</u>:

Teorema 10.1.4. *Siano $f, g \in \mathscr{R}_{[a,b]}$. Valgono le seguenti:*

1) $f + g \in \mathscr{R}_{[a,b]}$ *e*

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

2) $\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$ *e si ha*

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

3) $f(x) \le g(x)$ *su* $[a,b] \implies \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$

4) $|f| \in \mathscr{R}_{[a,b]}$ *e si ha*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Avremo inoltre che:

Proposizione 10.1.2. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona*[3]. *Allora $f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$.*

(La dimostrazione considera ancora la differenza tra somma superiore e inferiore che, per sommatoria, dista a meno della solita costante ε dalle funzione calcolata nel punto.
Concretamente, avremo che la funzione nell'estremo superiore meno la funzione nell'estremo inferiore distano di una costante su tutto l'intervallo e si preserva la relazione di ordine).

Vale inoltre la proprietà di <u>additività dell'integrale</u>:

Teorema 10.1.5. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Sia $c \in\,]a,b[$. Allora $f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$ se e solo se $f \in \mathscr{R}_{[a,c]}$ e $f \in \mathscr{R}_{[c,b]}$. In tal caso si ha*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \quad \left(\underline{\text{additività dell'integrale}}\right).$$

(La dimostrazione considera che, essendo *f* monotona e quindi limitata, la somma superiore dell'integrale definito in un intervallo equivale alla somma delle somme superiori sui propri sottointervalli su cui è sempre definito l'integrale. Avendo che gli estremi *sup* ed *inf* ricadono sempre nella coppia di massimi/minimi della funzione in [a,b], anche in presenza di discontinuità (punti non continui, ma presenti in un numero finito o numerabile), comunque si ha che gli integrali preservano, per somma, lo stesso risultato).

Similmente, tutti gli integrali superiori e tutti gli integrali inferiori, per confronto, preservano le relazioni di ordine sui propri estremi. Graficamente, si intende facilmente questo.

Similmente, anche gli integrali inferiori saranno minori/uguali di quelli superiori nell'intervallo valutato.

In altre parole, si ha

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx.$$

Allo stesso modo si riesce a dimostrare che

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx.$$

Ben più importante è il teorema della media integrale. Avendo un punto μ tale per cui si abbiano estremi superiore e inferiore, allora può essere definito il rapporto tra l'integrale e la differenza tra i suoi punti di valutazione.

Teorema 10.1.6 (della media integrale). *Se $f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$ esiste $\mu \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\inf_{[a,b]} f \leq \mu \leq \sup_{[a,b]} f \quad e \quad \mu = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}.$$

(Per la dimostrazione, abbiamo che la somma superiore è limitata dai due estremi, inferiore e superiore. Grazie alle equivalenze di prima, sappiamo che anche l'integrale è limitato dagli estremi, a meno però di (b – a); ciò ha senso, essendo l'integrale la differenza delle sommatorie tra *b* ed *a*.
Ponendo pertanto μ come si vede nella formula del teorema qui sopra, si ha facilmente il calcolo dell'andamento medio integrale).

Per convenzione vale che, se b < a, l'integrale è uguale al proprio opposto.

Enunciamo ora i due teoremi fondamentali del calcolo integrale.

Il primo teorema fondamentale del calcolo enuncia che se si ha una funzione limitata ed integrabile, la funzione integrale F(x) è continua sull'intervallo dato (1). Se inoltre f(x) è continua sull'intervallo dato, allora la funzione F'(x) è derivabile in ogni punto per cui f(x) sia continua sul punto x_0 dell'intervallo dato (2).

Teorema 10.2.1 (1° Teorema Fondamentale del Calcolo). *Sia $f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$. Posto $I_f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$,*

$$I_f(x) \overset{def.}{=} \int_a^x f(t)\,dt,$$

allora

(1) *I_f è continua su $[a,b]$,*

(2) *se f è continua in $x_0 \in [a,b]$ allora I_f è derivabile in x_0 e si ha*

$$\frac{d}{dx} I_f(x_0) = f(x_0).$$

(Per la dimostrazione, consideriamo la differenza dell'integrale superiore e inferiore a meno di un incremento *h*. Usando il risultato del valor medio, avremo che il punto x_0, a meno di un fattore *h* di incremento, avrà estremo superiore e inferiore e il loro limite tende a 0. Ciò prova (1).
Similmente, essendo *f* continua, allora, il punto μ è limitato sopra e sotto dalla funzione continua in x_0 a meno della solita costante ε. Ciò significa che il limite di μ tende esattamente a $f(x_0)$ e quindi è continuo anche nella propria derivata).

Da ciò consegue che la derivata della funzione integrale F(x) dà proprio come risultato f(x).

Se $f \in C([a,b])$ allora I_f è derivabile su $[a,b]$ e

$$\frac{d}{dx} I_f(x) = f(x) \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Inoltre, abbiamo il concetto di *funzione primitiva*, tale che qualsiasi funzione derivabile e continua G(x) coincida per derivata alla funzione assegnata f(x).
(La dimostrazione considera che si ricava proprio l'integrale sommato ad una costante di integrazione C).

Corollario 10.2.2. *Se $f \in C([a,b])$ ed $x_0 \in [a,b]$. Posto*

$$G\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \quad G(x) \overset{def.}{=} \int_{x_0}^x f(t)\,dt,$$

risulta

$$G'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Da qui, esplicitamente:

Definizione 10.2.1. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Una *primitiva* di f è una funzione $\phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che

$$\phi'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in [a,b].$$

(Ogni funzione continua ammette *almeno* una primitiva; se la differenza delle primitive di una funzione è costante, allora la sua derivata è pari a 0 e la funzione *f* è costante su tutto l'intervallo).

Abbiamo poi il secondo teorema fondamentale del Calcolo, sapendo che se una funzione ammette una primitiva ϕ(x) sull'intervallo, l'integrale è dato dalla differenza della primitiva nei due estremi (superiore e inferiore) dell'intervallo stesso:

Sia $f \in C([a,b])$ e sia ϕ una primitiva di f su $[a,b]$. Allora

$$\int_a^b f(t)\, dt = \phi(b) - \phi(a).$$

All'atto pratico del calcolo, si avrà come notazione:

Notazione. Si scrive anche $\phi\big|_a^b$ (oppure $\phi\big|_{x=a}^{x=b}$) col significato

$$\phi\big|_a^b \stackrel{def.}{=} \phi(b) - \phi(a).$$

E, dal primo teorema fondamentale del calcolo, consegue quanto enunciato prima nel commento della dimostrazione sulla costante C:

$$I_f(x) = \phi(x) + C \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Pertanto

$$\int_a^b f(x)\, dx = I_f(b) = I_f(b) - \underbrace{I_f(a)}_{=0} = (\phi(b) + C) - (\phi(a) + C) = \phi(b) - \phi(a).$$

Successivamente, abbiamo la formula dell'integrazione per parti (usata sempre in questo modo negli esercizi):

Teorema 10.2.3 (Integrazione per parti). *Sia $f \in C([a,b])$ e sia $g \in C^1([a,b])$. Sia F una primitiva di f. Allora*

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = F(x)\, g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)\, g'(x)\, dx.$$

(La dimostrazione considera proprio che si stia integrando la derivata del prodotto tra una primitiva ed un'altra funzione, da cui deriva direttamente questa formula enunciata).

Parallelamente, abbiamo la formula dell'integrazione per sostituzione (usata sempre in questo modo negli esercizi e si considera di prendere una funzione da sostituire e, successivamente, ricavarne la derivata per una costante e così risolvere l'esercizio):

Teorema 10.2.4 (Integrazione per sostituzione). *Sia $f \in C([a,b])$ e sia $\varphi\colon [\alpha,\beta] \xrightarrow[1-1]{su} [a,b]$, una biiezione. Se $\varphi \in C^1([\alpha,\beta])$ allora*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt.$$

Integrali generalizzati/integrali impropri

Una funzione è integrabile in senso generalizzato se è convergente per limite su tutto l'intervallo (da un estremo e dall'altro).

Definizione 10.3.1. Siano $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ ed $f \in C([a, b[) := C([a, b[\,, \mathbb{R})$. Allora f è I.S.G. ($\equiv$ *integrabile in senso generalizzato*) su $[a, b[$ se esiste finito

$$\lim_{y \to b^-} \int_a^y f(x)\,dx \quad \left(\stackrel{def.}{\equiv} \int_a^b f(x)\,dx \right)$$

e in tal caso si dice che $\int_a^b f(x)\,dx$ è *convergente*.

Definizione 10.3.2. Siano $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in C(]a, b])$; allora f è I.S.G. su $]a, b]$ se esiste finito

$$\lim_{y \to a^+} \int_y^b f(x)\,dx \quad \left(\stackrel{def.}{\equiv} \int_a^b f(x)\,dx \right)$$

e si dice che $\int_a^b f(x)\,dx$ è *convergente*.

Vale sempre *l'additività degli integrali*, ma in modo indipendente da *c* mostrato, in quanto, per limite, la differenza tra l'integrale superiore e inferiore potrebbe essere diversa (cosa che normalmente accade ed ecco perché si parla di integrale improprio).

$$\int_a^b f(x)\,dx \stackrel{def.}{\equiv} \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Si ha quindi che una funzione è integrabile in senso generalizzato su un intervallo se:

Teorema 10.3.1. *Una funzione $f \in C([a, b[)$ è I.S.G. su $[a, b[$ se e solo se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, W \in \mathscr{U}_b : x, x' \in [a, b[\cap W \implies \left| \int_{x'}^{x} f(t)\,dt \right| < \varepsilon.$$

(La dimostrazione considera che avendo la funzione integranda convergente, allora la funzione integrale ammette limite e, per Cauchy, la differenza tra le funzioni primitive corrisponde ad una differenza *molto vicina* delle proprie funzioni integrali nel punto *x* considerato).

Se si ha che la funzione, a prescindere dal segno, converge (pertanto è minore ad infinito) su tutto l'intervallo è assolutamente integrabile in senso generalizzato.

Teorema 10.3.2. *Se $f \in C([a, b[)$ è A.I.S.G. allora f è I.S.G., ossia*

$$\int_a^b |f(t)|\,dt < \infty \implies \int_a^b f(t)\,dt < \infty.$$

(La dimostrazione considera il confronto tra l'integrale della funzione integranda e l'integrale del valore assoluto della funzione integranda, in cui il primo è <= del secondo. Pertanto, ne consegue che al limite, distano tra loro a meno di una costante ε).

Vale il teorema del confronto: se *g* è assolutamente integrabile in senso generalizzato, lo sarà anche *f*.
(Per la dimostrazione, avremo che il valore assoluto della funzione integranda è <= del massimo M per la funzione continua *g* e il limite di quest'ultima funzione esiste.
f è monotona crescente e, pertanto, il limite esiste, ma non necessariamente finito. Dato che, per confronto e per additività, abbiamo che la funzione esiste sugli estremi a meno del massimo M, avremo che l'integrale della funzione è minore ad infinito e quindi esiste).

Per gli esercizi, valgono i due seguenti corollari:

Corollario 10.3.1. *Sia* $f \in C(]a,b])$. *Se esiste* $\alpha < 1$ *tale che*

$$f(x) = O\left(\frac{1}{(x-a)^\alpha}\right) \quad x \to a^+,$$

allora f *è A.I.S.G. su* $]a,b]$.

Corollario 10.3.2. *Sia* $f \in C([a,+\infty[)$. *Se esiste* $\alpha > 1$ *tale che*

$$f(x) = O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \quad x \to +\infty,$$

allora f *è A.I.S.G. su* $[a,+\infty[$.

Similmente, avremo che *gli integrali oscillanti convergono*.

Teorema 10.3.4 (Convergenza degli integrali oscillanti). *Siano* $f \in C([a,b[)$, $g \in C^1([a,b[)$ *e supponiamo che:*

1) f *ha primitiva limitata in* $[a,b[$ *;*

2) g *è monotona (crescente o decrescente);*

3) $\lim_{x\to b} g(x) = 0$.

Allora $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ *esiste in S.G., ossia,* fg *è I.S.G. in* $[a,b[$.

(La dimostrazione considera che f(x) sia continua e F(x) sia monotona e quindi esisterà un limite.
Integrando per parti, si ottiene che avremo il valore assoluto della funzione *f* <= all'integrale del valore assoluto di *f*, a condizione che questa *f* sia Riemann-integrabile su [a, b].
Inoltre, avendo che l'integrale del valore assoluto del prodotto tra f(x) e g(x) è maggiorato dal massimo M moltiplicato per 4 e per la costante di limite ε, significa che è convergente su tutto l'intervallo e, come tale, esiste l'integrale).

10.3.1 Esempi ed esercizi

Esempio 10.3.1 (Importante). Per ogni $\alpha > 0$ esiste

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$$

in senso generalizzato (abbreviato in S.G., d'ora in avanti).
Infatti $x \mapsto \sin x$ è continua con primitiva continua e limitata e si ha che $g(x) = \frac{1}{x^\alpha} \searrow$ (ossia, g è monotona decrescente) e $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$. Ciò significa che valgono le ipotesi 1), 2) e 3) del Teorema 10.3.4.

Osservazione 10.3.2. Si ha

$$A.I.S.G. \Longrightarrow I.S.G., \quad \text{ma} \quad I.S.G. \not\Longrightarrow A.I.S.G..$$

Infatti

$$h(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha} \quad \text{è} \quad \begin{cases} A.I.S.G. \text{ su } [1, +\infty[& \text{se } \alpha > 1 \\ \text{non è } A.I.S.G. \text{ (ma solo } I.S.G.) \text{ su } [1, +\infty[& \text{se } \alpha \in]0, 1]. \end{cases}$$

Dimostriamo queste affermazioni. Infatti

$$1 \geq |\sin x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \implies |\sin x| \geq |\sin x|^2 = \sin^2 x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Ne segue che

$$\lim_{y\to+\infty} \int_1^y \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\, dx \geq \lim_{y\to+\infty} \int_1^y \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\, dx = \lim_{y\to+\infty} \left(\int_1^y \frac{1 - \cos 2x}{2x^\alpha}\, dx \right)$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{1}{2} \left(\int_1^y \frac{1}{x^\alpha}\, dx - \int_1^y \frac{\cos 2x}{x^\alpha}\, dx \right) \right),$$

dove abbiamo usato le *formule di duplicazione*[6] di sin e cos.

Esercizio 10.3.3. Studiare la convergenza del seguente integrale

$$\int_0^1 \lg\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Svolgimento. In un intorno destro di $x = 0$ si ha che

$$f(x) = \lg\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty;$$

inoltre $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$. Dato che risulta

$$f \in C([\varepsilon, 1]) \quad \forall\, \varepsilon \in]0, 1[,$$

occorre studiare il comportamento asintotico di f in $x = 0$. Dato che

$$\lg y = o(y^\alpha) \quad \forall\, \alpha > 0 \quad y \to +\infty$$

si ha

$$\lg\left(\frac{1}{x}\right) = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \quad x \to 0^+ \quad \forall\, \alpha > 0.$$

Allora si prende $\alpha < 1$. Applicando il Corollario 10.3.1 si trova che f è A.I.S.G..
Notare che

$$f = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \quad x \to 0^+ \implies f = O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \quad x \to 0^+.$$

□

Serie numeriche

Chiariamo subito il concetto di serie; in effetti, queste rappresentano delle sommatorie, in particolare, somme infinite dei numeri (nel senso che generalmente vanno da 1 ad infinito).
In particolar modo, consideriamo:

$$\frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+2)(a+3)} + \cdots + \frac{1}{(a+n)(a+n+1)} + \cdots,$$

vista, più in generale *induttivamente* come:

$$\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}$$

e quindi, da 1 ad infinito come:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)}$$

più in generale vista come limite per n che tende ad infinito:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(a+k)(a+k+1)} \right)$$

Si nota che "l'insieme dei numeri che per successione permettono di ottenere la serie" è possibile rappresentarli, a loro volta, come successione:

$$a_n = \frac{1}{(a+n)(a+n+1)} = \frac{1}{a+n} - \frac{1}{a+n+1}$$

Ne segue che S_n può essere visti come somma dei primi n termini (definita come somma parziale, dunque):

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{a+k} - \frac{1}{a+k+1} \right) = \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+n+1}$$

E in generale, le serie hanno convergenza, equivalentemente, come:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{a+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{a+1}$$

Normalmente, siamo interessati a capire se, data una *serie* (intesa quindi come *successione delle somme parziali*) essa *converge, diverge/non converge* (quindi, oscilla).

Dato quindi un generico termine della serie (per coerenza di notazione, definito come "termine k-esimo", ma semplicemente è un termine della serie con indice k, quindi a_k), avremo che la somma parziale n-esima è proprio:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

avendo che il limite della serie tende proprio al suo termine generale:

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Banalmente, avremo che, dato il limite:

$$\lim_{n->+\infty} S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} k$$

1) Il limite $\lim_{n->\infty} S_n$ è un numero reale finito **L**. In tal caso, avremo che la serie è convergente.
2) Il limite $\lim_{n->\infty} S_n = +\infty$, quindi il limite della successione delle somme parziali diverge positivamente

3) Il limite $\lim_{n -> \infty} S_n = -\infty$, quindi il limite della successione delle somme parziali diverge negativamente
4) Il limite $\lim_{n -> \infty} S_n$ non esiste. In tal caso, la serie è irregolare / indeterminata.

Particolari tipi di serie sono:

- La serie geometrica di *ragione* (o termine generale) *q*: $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$

Di tale serie, semplicemente guardando il numero reale q, sappiamo praticamente tutto! Infatti:

- **se il modulo della ragione q è minore di 1**, ossia se $-1 < q < 1$, **la serie geometrica converge** ed ha per somma $\frac{1}{1-q}$

- **se la ragione q è minore o uguale a -1, la serie geometrica è irregolare**;

- **se la ragione q è maggiore o uguale a 1, la serie geometrica diverge positivamente**.

- La serie telescopica (considera il termine n-esimo ed n+k-esimo, quindi si intuisce si "allunghi" di un termine *k* proprio come un telescopio, da cui il nome)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \beta_{k+1}).$$

Non è difficile vedere che

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\beta_k - \beta_{k+1}) = (\beta_1 - \beta_2) + (\beta_2 - \beta_3) + \cdots + (\beta_n - \beta_{n+1}) = \beta_1 - \beta_{n+1}.$$

Pertanto

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \beta_1 - \lim_{n \to +\infty} \beta_{n+1},$$

ossia, si ha sempre

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \beta_{k+1}) = \beta_1 - \lim_{n \to +\infty} \beta_n.$$

In altre parole, la somma di una serie telescopica, se esiste, è data dall'ultima formula, ed esiste se e solo se esiste $\lim_{n \to +\infty} \beta_n$. Inoltre, tale serie diverge, se diverge questo limite, e non converge (oscilla), se non esiste questo limite.

Banalmente, avremo che:
- questa serie è data dalla composizione di "addendi" diversi
- il limite degli addendi, comunemente, tende ad un certo valore
- tutta la serie (quindi, telescopica, converge)

Si tratta di riconoscere le somme tra termini successivi e, infine, capirne la somma. Quindi, prendere singolarmente le cose.

data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right)$ verificare che è una serie convergente e determinarne la somma.

Osserviamo che la serie proposta è una una serie telescopica, poiché è del tipo $\sum_{n=m}^{+\infty}(a_n-a_{n+k})$ con $a_n=\frac{1}{n^2}$ e $a_{n+k}=a_{n+2}=\frac{1}{(n+2)^2}$. Dato che il limite del termine generale esiste ed è finito

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)=0$$

la serie data converge, e la sua somma è data da:

$$a_1+a_2+.....+a_k$$

Essendo in questo caso $k=2$ la somma sarà data a_1+a_2. In particolare $a_1=\frac{1}{1^2}=1$ e $a_2=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$, dunque la somma sarà $a_1+a_2=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$.

Esempio. Si consideri la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}.$$

Tale serie converge con somma 1.
Infatti

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

e dunque

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=1.$$

Si noti che:

- ogni successione è una serie (il limite della successione dei singoli membri può essere vista, a sua volta, come serie telescopica)
- la serie geometrica viene solitamente vista come metodo comodo per generare i numeri decimali

Ora, ben più importanti, sono i criteri di convergenza.

In tal senso, enunciamo la linearità, quindi, la somma di serie convergente è anch'essa convergente.

Teorema 12.3.1 (Linearità). *Date due serie convergenti, ogni combinazione lineare è una serie convergente. Cioè, se* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ *sono serie convergenti allora per ogni* $\lambda,\eta\in\mathbb{R}$ *si ha che la serie* $\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda\, a_k+\eta\, b_k)$ *converge e*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda\, a_k+\eta\, b_k)=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}a_k+\eta\sum_{k=1}^{\infty}b_k.$$

Similmente, usando il criterio di Cauchy per successioni (vale a dire, due successioni abbastanza vicine tra di loro, convergono allo stesso limite a meno di una costante ε), è possibile dire che ciò valga anche sulle serie (si presenta questa come nota di margine e collegamento logico). In questo modo, la serie converge se la sommatoria è di Cauchy.

Similmente, se la serie ha una tendenza ad una successione, ugualmente tende a 0.

Corollario 12.3.1. *Sia* $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ *una successione* $\nearrow$ *di numeri naturali*[3]*.*

Se la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge, allora si ha*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=n}^{P_n} a_k\right) = 0.$$

Abbiamo poi che, se converge la serie, il limite della successione tende a 0 (vale per la successione n-esima)

Corollario 12.3.2. *Se* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge allora* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Esempio utile: la serie armonica, che diverge positivamente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

È un esempio di fondamentale importanza. Essa non converge a un numero finito, ma *diverge positivamente*. Per provare queste affermazioni si può usare il Corollario 12.3.1 $\left(\text{ma non il Corollario 12.3.2, visto che } \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0\right)$. Sia a tal fine $P_n = 2\,n$. Si ha allora

$$\sum_{k=n}^{2\,n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n}^{2\,n} \frac{1}{2\,n} = \frac{n+1}{2\,n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\,n} > \frac{1}{2}.$$

In altre parole, non converge a zero la quantità

$$\left|\sum_{k=n}^{2\,n} \frac{1}{k}\right| > \frac{1}{2}.$$

Ma allora non può convergere la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Essendo poi a termini positivi, essa deve divergere positivamente. Riassumendo, abbiamo dimostrato che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

In maniera semplice, può essere generalizzata come segue:

Sia α un numero reale. Si dice *serie armonica generalizzata* la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Anch'essa, indipendemente dal valore di α, è una serie a termini positivi e come tale non potrà essere una serie irregolare. Possiamo essere più precisi e dire che tale serie:

- **converge** se $\alpha > 1$;
- **diverge positivamente** se $\alpha \leq 1$.

Osservate che per $\alpha = 1$ si ottiene la serie armonica.

Banalmente, abbiamo poi che una serie è *assolutamente convergente* se la serie del valore assoluto della successione termine generale è convergente.

Definizione 12.3.1. La serie $\sum_{k=1} a_k$ è detta *assolutamente convergente* se $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ è convergente.

Teorema 12.3.3. *Ogni serie assolutamente convergente è convergente.*

(La dimostrazione considera Cauchy, quindi distanza tra serie vicine e successivamente, la disuguaglianza triangolare, facendo valere la maggiorazione della serie del valore assoluto sul valore assoluto della serie).

Osservazione 12.3.1. *Non è vero il viceversa del precedente teorema.*
Ad esempio, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

non è assolutamente convergente ma è convergente[4]. Infatti

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

È inoltre noto che una serie a termini positivi <u>non può oscillare</u>.

Teorema 12.3.4. *Si assuma che* $\sum_{k=1} a_k$ *è una serie a termini positivi, cioè* $a_k \geq 0$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$. *Allora la serie converge o diverge positivamente.*

Ossia, se una serie è a termini positivi *non può oscillare.*

(La dimostrazione è basata sulla monotonia delle successioni, pertanto il limite converge (tende ad un valore) o diverge (va verso infinito)).

Altra cosa di grande importanza sulle serie sono, certamente, i criteri di confronto delle serie.

Il primo è proprio il *criterio del confronto* (da cui derivano gli altri). In particolare, si considerano due serie generico e si ha che se la seconda converge e tendono allo stesso limite, allora anche la prima converge. Si intende convergenza *assoluta*, dunque a meno del segno e sempre valida.

Teorema 12.3.5 (Criterio di confronto). *Siano* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *serie (reali). Supponiamo che valgano le seguenti ipotesi:*

1) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *converge assolutamente*

2) $a_k = O(b_k)$ *per* $k \to \infty$ $\left(\textit{ossia } \exists\, M_1 \in \mathbb{R}_+ \textit{ tale che } \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{b_k}\right| < M_1\right)$.

Allora $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge assolutamente.*

(La dimostrazione si basa sulla monotonia delle serie e delle rispettive successioni, che tendono ad un particolare valore. Essendo che entrambe convergono, avremo che la somma dei rispettivi valori di convergenza tende ad un valore comune M, a cui tende più generalmente a_k e quindi la serie che ci interessa).

Il criterio del confronto vale anche per la divergenza e per la convergenza assoluta.

Proposizione 12.3.1. *Siano* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *due serie a termini positivi e tali che che* $a_k \leq b_k$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$. *Se* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *converge, allora* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge; inoltre se* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *diverge positivamente, allora* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *diverge positivamente.*

Corollario 12.3.3. *Date due serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *tali che*

$$a_k,\ b_k \neq 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \quad e \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Si ha che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge assolutamente se e solo se la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *converge assolutamente.*

Le serie possono essere a tutti gli effetti messe a confronto con gli integrali.
Esso viene definito come criterio integrale per le serie, utile nello studio delle serie armoniche generalizzate o serie con logaritmi.

Teorema 12.3.6 (confronto con l'integrale). *Sia* $f\colon [1, +\infty[\, \to \mathbb{R}$ *una funzione continua, monotona decrescente e non negativa*[5]. *Allora* $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ *converge se e solo se* $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ *è convergente.*

(La dimostrazione di quest'ultimo coinvolge successioni non negative e monotone crescenti, che quindi hanno limite. L'integrale è definito su estremi da 1 ad infinito della funzione e, grazie a questo fatto, avremo che questo può essere generalizzato per un termine *k*, tale che al termine 1, la funzione venga vista come un limite tendente ad 1 e al termine n+1; ciò significa che, induttivamente, grazie al confronto tra serie, vediamo che ogni termine da 1 ad infinito, avrà un termine maggiorante e sarà convergente allo stesso valore, quindi definendo una serie).

Altri due criteri importanti sono il <u>criterio della radice e del rapporto.</u>

Proposizione 12.3.2 (Criterio della radice). *Sia* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie a termini positivi (cioè* $a_n \geq 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*). Allora se esistono* $l \in]0,1[$ *ed* $\bar{n} \in \mathbb{N}$ *tali che*

$$\sqrt[n]{a_n} \leq l \quad \forall\, n \geq \bar{n},$$

si ha che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

(Per la dimostrazione, si ha che, usando il confronto con la serie geometrica l^n, convergente, anche la nostra serie con successione a_n converge, sapendo che il limite di sqrt(a_n) tende esattamente allo stesso limite).

Proposizione 12.3.3 (Criterio del rapporto). *Sia* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie a termini positivi (cioè* $a_n \geq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$*). Se esistono* $l \in]0,1[$ *ed* $\bar{n} \in \mathbb{N}$ *tali che*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq l \quad \forall\, n \geq \bar{n},$$

allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

N.B. L'ipotesi del criterio vale in particolare se esiste $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$. Si dimostra inoltre che se esiste $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$ allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge positivamente.

(Per la dimostrazione e per questo criterio, normalmente, si usano gli ordini di infiniti ed infinitesimi, in parole povere, gli ordini di grandezza. Dato che il termine *n* converge, convergono anche tutti i termini precedente ad un certo limite e, avendo la monotonia, tutti i termini hanno lo stesso limite).

Concludiamo con le <u>serie a segni alterni</u>. Per il *criterio di Leibniz* si ha che:

Teorema 12.3.7 (Criterio di Leibniz). *Si consideri la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$, *dove*

$$a_k > 0\,\forall \quad k \in \mathbb{N}.$$

Supponiamo inoltre che

1) $a_k \searrow$ *(ossia, è monotona decrescente);*
2) $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0.$

Allora $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ *è convergente.*

(negli esercizi, verifico che la successioni sia decrescente e verifico che sia <=0 e il limite tenda a 0)

Equazioni differenziali

Un'equazione differenziale è un'equazione che lega una funzione incognita alle sue derivate

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo non banale ed $a, b \in C(I)$ (ossia funzioni continue su I). Allora $\varphi \in C^1(I)$ si dice soluzione di

$$y' = a(x)\, y + b(x) \quad \forall\, x \in I \tag{11.1}$$

se e solo se si ha che

$$\varphi'(x) = a(x)\varphi(x) + b(x) \quad \forall\, x \in I.$$

L'equazione (11.1) è detta *equazione differenziale lineare del primo ordine.*

Si ha inoltre che se si richiede che la soluzione dell'equazione differenziale soddisfi la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$, allora, si ha un *problema di Cauchy*.

Teorema 11.1.1. *Sia $x_0 \in I$. Allora $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ è soluzione di (11.1) se e solo se*

$$\varphi(x) = e^{A(x)}\left(C + \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-A(t)}\, dt\right) \quad \forall\, x \in I, \tag{11.2}$$

dove $A(x) \overset{def.}{\equiv} \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt.$

Abbiamo, inoltre, il caso di un'equazione lineare *omogenea*.

Osservazione 11.1.1. Sia $y' = a(x)\, y \quad (x \in I)$. In tal caso l'equazione si dice "omogenea". Allora $y' = a(x)\, y$ e se supponiamo che $y \neq 0$ (ad esempio, $y > 0$) si ha

$$\frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}(\lg y) = a(x) \quad (\forall\, x \in I)$$

ossia (integrando ambo i membri tra x_0 ed x)

$$\lg y = \lg y(x_0) + \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt \implies$$

$$y(x) = e^{\lg(y(x_0)) + \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt} = y(x_0) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt} = y(x_0) \cdot e^{A(x)}.$$

In altre parole, la funzione trovata risolve l'equazione omogenea associata.

In altre parole, la funzione trovata risolve l'equazione omogenea associata. Osservare anche che la funzione $y(x) = C\, e^{A(x)}$ risolve *sempre* l'omogenea, quale che sia $C \in \mathbb{R}$.
Cerchiamo[1] ora, a partire dalla soluzione dell'omogenea, la soluzione generale dell'equazione $y' = ay + b$ (con $a, b \in C(I)$).

Sia $y(x) = C\, e^{A(x)} \quad (x \in I)$ dove ora C la penso come funzione (non più costante) incognita da determinare. In tal caso si ha

$$y' = C'e^A + CA'e^A = e^A(C' + Ca).$$

Allora

$$C' = e^{-A(x)}b(x) \quad \forall\, x \in I \implies C(x) = C(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}b(t)\, dt.$$

Ne segue

$$y(x) = e^{A(x)} \left(C(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}b(t)\, dt \right).$$

Se inoltre $y(x_0) = y_0$ ($\in \mathbb{R}$) si trova

$$y(x_0) = y_0 = e^{A(x_0)}C(x_0) \iff C(x_0) = e^{-A(x_0)}y_0 \iff C(x_0) = y_0.$$

Perciò

$$y(x) = e^{A(x)} \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}b(t)\, dt \right].$$

Altro tipo sono le <u>equazioni differenziali a variabili separabili</u>.

Definizione 11.2.1. Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli aperti, $f \in C(I)$, $g \in C(J)$. Si dice *equazione a variabili separabili* ogni equazione del tipo

$$\begin{cases} y' = f(x)\, g(y) \quad \forall\, x \in I \quad (*) \\ (y(x_0) = y_0 \ \in J) \end{cases} \tag{11.3}$$

dove y è una funzione della variabile $x \in I$; se si impone una *condizione iniziale* $y(x_0) = y_0 \in J$ con $x_0 \in I$, il precedente è detto *problema di Cauchy* per l'equazione a variabili separabili $(*)$.

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = h(x) \cdot k(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

in cui h e k siano funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno di x_0 e di y_0 rispettivamente; allora la funzione $f(x, y) = h(x) \cdot k(y)$ è di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno Ω di (x_0, y_0) e quindi il problema ha una ed una sola soluzione definita in un intervallo aperto contenente x_0, per il Teorema 6.2.
Per cercare di determinare la soluzione, operiamo nel seguente modo: osserviamo, prima di tutto, che se $k(y_0) = 0$ la funzione costante $y(x) = y_0$ è una (quindi l'unica) soluzione locale.
Se invece $k(y_0) \neq 0$, per continuità si ha anche $k(y) \neq 0$ in un intorno V di y_0; quindi, tenuto conto che $y(x) \in V$ se x appartiene ad un opportuno intorno U di x_0 (perchè y deve essere continua), possiamo dire che per ogni $s \in U$ si ha

$$\frac{y'(s)}{k(y(s))} = h(s) \ .$$

Se integriamo entrambi i membri dell'uguaglianza precedente nell'intervallo di estremi x_0 e $x \in U$ otteniamo

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(s)}{k(y(s))}\, ds = \int_{x_0}^{x} h(s) ds \ ,$$

vale a dire

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{du}{k(u)} = \int_{x_0}^{x} h(s) ds.$$

In questo modo giungiamo ad un'eguaglianza tra una funzione della variabile $y(x)$ e una della variabile x. Se poi siamo in grado di ricavare $y(x)$ in funzione di x, otteniamo una forma esplicita della soluzione; altrimenti, occorreranno metodi differenti (che esulano dagli scopi di queste note) per studiare la soluzione.